

上讲回顾

- 用半经典模型解决了Drude模型对比热高估的问题——高估了参与热激发的电子数目
- 模型：Sommerfeld仍然沿用Drude模型的基本假定，但用量子力学来处理金属自由电子气
 - * 给出了基态 ($T=0$) 的重要性质，引入即使超出自由电子气也仍然有效的一些重要概念
 - # 费米能级、状态密度

本讲目的：电子气在低温和外场下

1. 低温下金属自由电子性质与基态有何不同？
2. 自由电子气在电磁场下如何运动？

第3讲、自由电子气的其他性质

1. 自由电子气低温性质(利用低温费米分布特性)

- * 比热 (低温时, 电子贡献才是主要的)
- * 费米能级、总能 (Sommerfeld积分)

2. 电磁场中的电子气

- * Hall效应 (半经典)
- * 朗道能级 (量子)

相比于基态，极低温下的电子气性质会有哪些不同？

1、自由电子气低温 ($k_B T \ll E_F$) 性质

- 引进温度，即引进费米分布

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

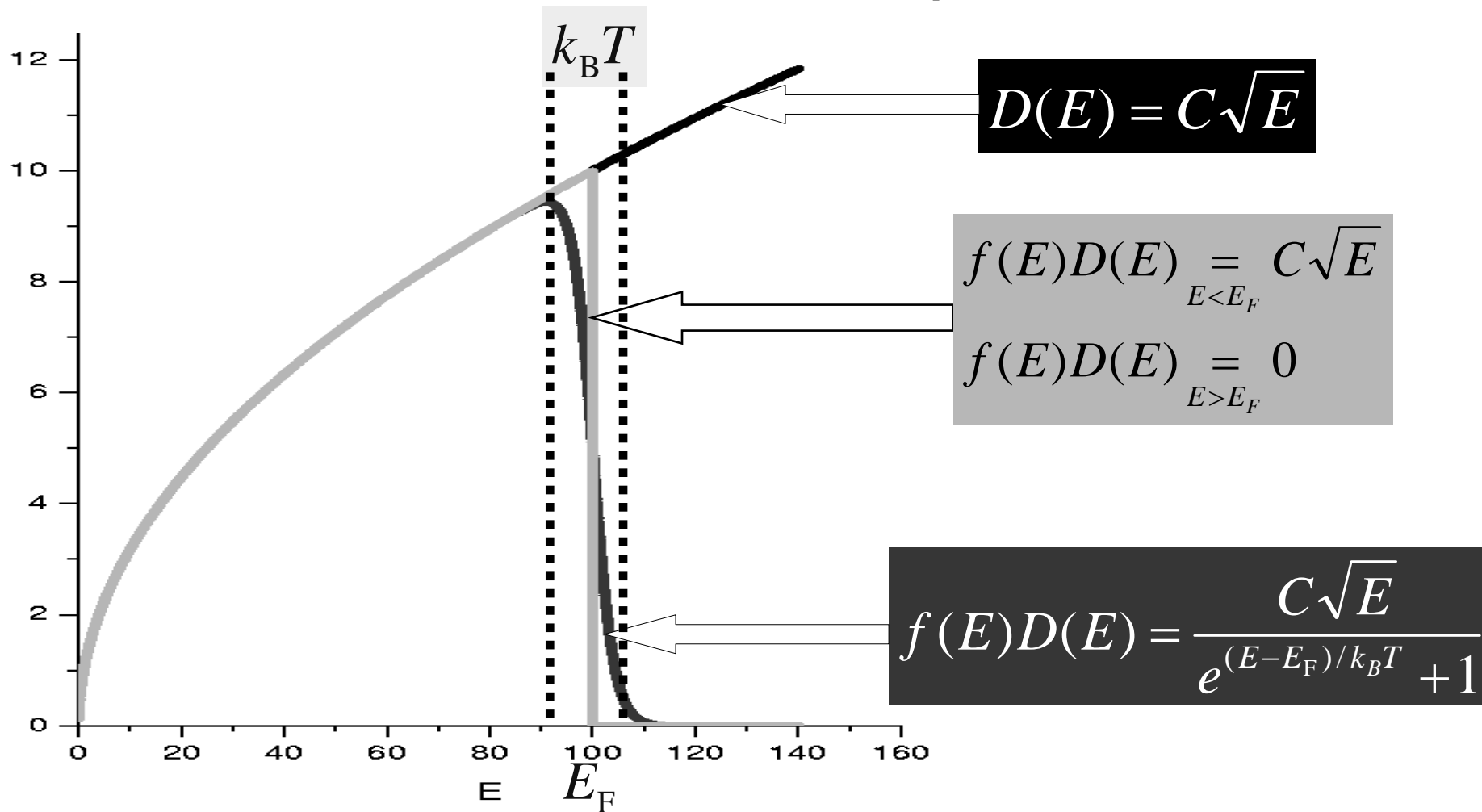
- 用总电子数确定Fermi能级

$$N = \int_0^\infty f(E) D(E) dE = \begin{cases} C \int_0^{E_F^0} \sqrt{E} dE, & T = 0 \\ C \int_0^\infty f(E) \sqrt{E} dE, & T \neq 0 \end{cases}$$

- 确定电子气能量

$$U = \int_0^\infty f(E) D(E) E dE = \begin{cases} C \int_0^{E_F^0} E^{3/2} dE, & T = 0 \\ C \int_0^\infty f(E) E^{3/2} dE, & T \neq 0 \end{cases}$$

$T \neq 0$ 电子被热激发，看被积函数

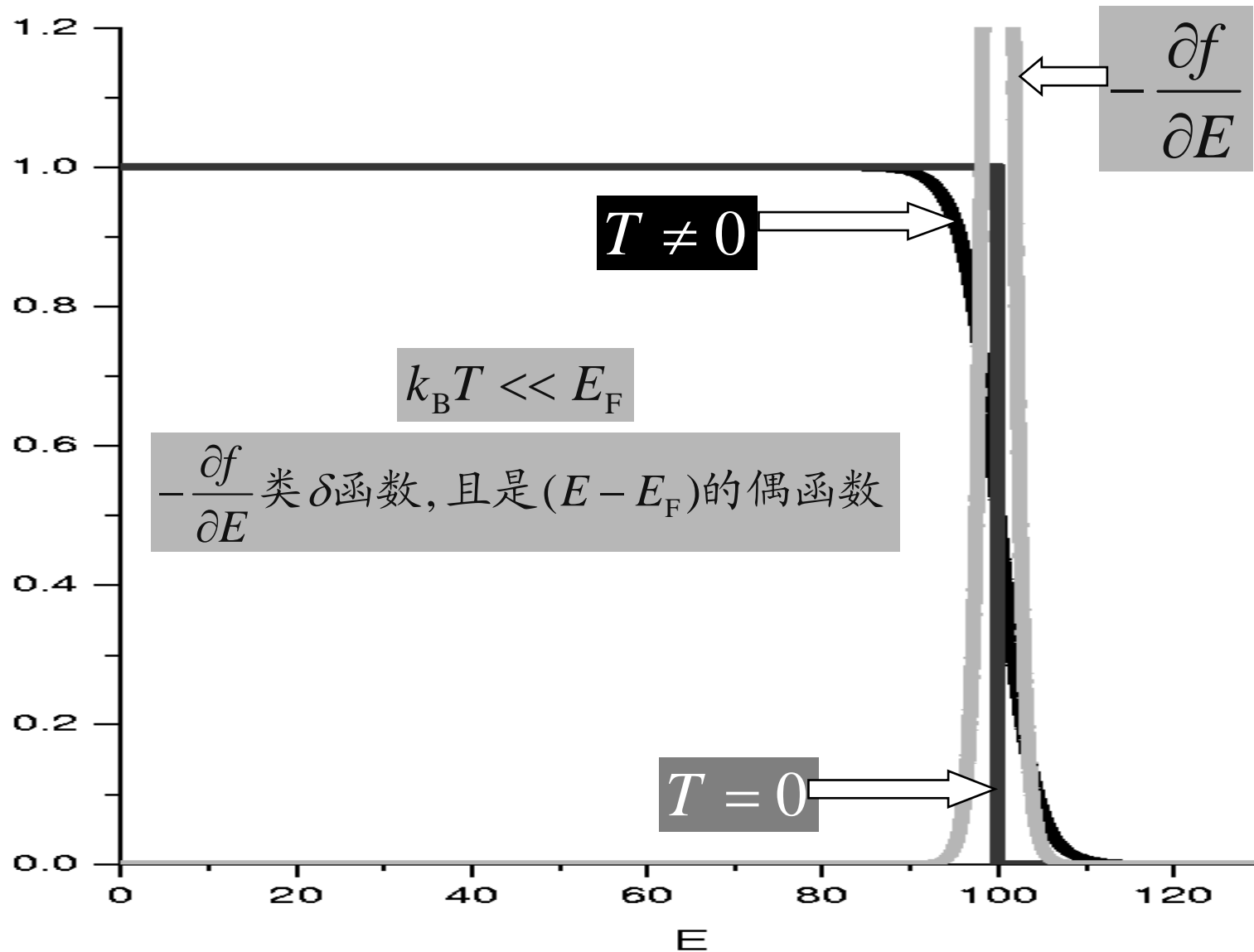


$$N = \int_0^{\infty} f(E)D(E)dE$$

电子的总数

$$U = \int_0^{\infty} f(E)D(E)EdE$$

低温时费米分布的数学性质



$-df(E)/dE$ 的对称性

- 对费米分布，其对 E 的导数总是 $x=(E-\mu)$ 的偶函数
- 当 $T \rightarrow 0$ 时，才是delta函数

$$x = (E - \mu) / k_B T$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = f(x)$$

$$-\frac{df}{dx} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2}, & x \geq 0 \\ \frac{e^{-|x|}}{(e^{-|x|} + 1)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

A. 比热($k_B T \ll E_F$)

- 总能量

$$U = \int_0^{\infty} D(E) f(E) E dE$$

- 总电子数

$$N = \int_0^{\infty} f(E) D(E) dE$$

$$E_F N = \int_0^{\infty} E_F f(E) D(E) dE$$

- 对这两个式子求导, 得 $C_V^{\text{el}} = \frac{\partial U}{\partial T} = \int_0^{\infty} dE E D(E) \frac{\partial f}{\partial T}$

$$0 = \int_0^{\infty} dE E_F D(E) \frac{\partial f}{\partial T}$$

- 相减后, 得 $C_V^{\text{el}} = \int_0^{\infty} dE (E - E_F) D(E) \frac{\partial f}{\partial T}$

- 根据 $(E - E_F) df/dT$ 的类 δ 函数性质, 可以近似得到

$$C_V^{\text{el}} \approx D(E_F) \int_0^{\infty} dE (E - E_F) \frac{\partial f}{\partial T}$$

- 对费米分布求导 $\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{E - E_F}{k_B T^2} \frac{e^{(E-E_F)/k_B T}}{\left[e^{(E-E_F)/k_B T} + 1 \right]^2}$

- 进行变量替换, $x = (E - E_F) / k_B T$

$$C_V^{\text{el}} \approx D(E_F) \int_0^\infty dE (E - E_F) \frac{\partial f}{\partial T} = k_B^2 T D(E_F) \int_{-E_F/k_B T}^\infty dx x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

- 低温时, 可将积分下限推至负无穷大, 得

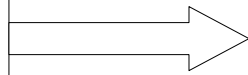
$$\int_{-\infty}^\infty dx x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

- 于是 $C_V^{\text{el}} = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T D(E_F) = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T \frac{3}{2E_F} N = \left(\frac{\pi^2}{2} \right) N k_B \frac{T}{T_F}$

- 与前面的半经典估计比较 $C_V^{\text{el}} \approx N k_B \frac{T}{T_F}$

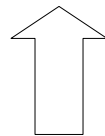
$$C_V^{\text{el}} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{k_B T}{E_F^0} = \left(\frac{\pi^2}{2} \right) N k_B \frac{T}{T_F}$$

与定性的结果仅差常数因子



定性的解释是正确的，即只有Fermi面附近的电子被激发！

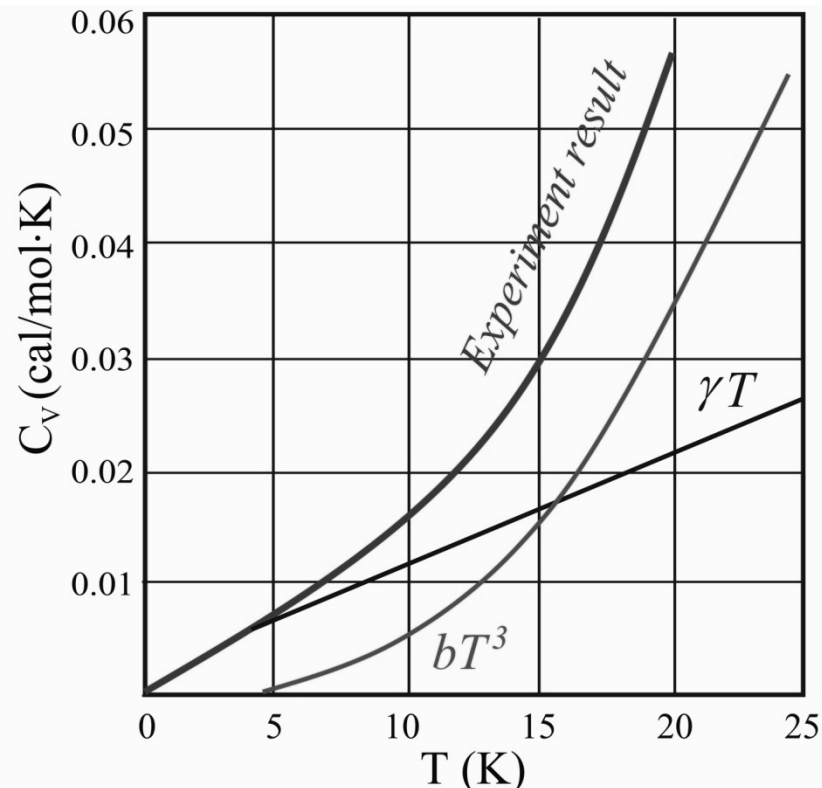
$$C_V^{\text{el}} \propto T$$



- 低温时，电子气对热容的贡献很小
- 并不只适用于自由电子气。电子许可能级形成能带时也是正确的

固体比热的实验结果

$$C_V = \gamma T + bT^3 = C_V^{\text{el}} + C_V^{\text{lat}}$$



只有在极低温度下，电子对比热的贡献才重要

自由电子气的其他性质

附录：Sommerfeld积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} H(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

- 常遇这样的积分，引入函数

$$Q(E) \equiv \int_{-\infty}^E H(\varepsilon) d\varepsilon$$

- * 其中 $H(E)$ 在当 E 趋向负无穷大时趋向零

- 对 I 作分部积分

$$I = Q(\varepsilon) f(\varepsilon) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon$$

- * 第一项， $-\infty$ 时 $Q(E)$ 积分区间为零， $+\infty$ 时 $f(E)$ 为零

- * 第二项， $-df/dE$ 是中心在 E_F 处的类 δ 函数，宽度约 $k_B T$ ，是 $(E-E_F)$ 的偶函数，将 $Q(E)$ 在 E_F 附近展开到二级近似，得到

$$Q(\varepsilon) = Q(E_F) + (\varepsilon - E_F) Q'(E_F) + \frac{1}{2} (\varepsilon - E_F)^2 Q''(E_F)$$

- * 该展开的第二项是 $(E-E_F)$ 的奇函数，为零

- 把 Q 的展开式(保留到二次)

$$Q(\varepsilon) = Q(E_F) + \frac{1}{2}(\varepsilon - E_F)^2 Q''(E_F)$$

- 代入

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon$$

- 第1项积分是 $Q(E_F)$ ，第2项与前面求比热的积分形式类似，不同的仅是 $k_B T$ 因子，仍然作同样的变量替换，利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

- 就可得sommerfeld积分

$$I = Q(E_F) + \frac{\pi^2}{6} Q''(E_F) (k_B T)^2$$

B. 费米能级 ($T \ll T_F$)

$$I = Q(E_F) + \frac{\pi^2}{6} Q''(E_F) (k_B T)^2$$

- 低温时 ($T \ll T_F$) 的费米能级 (化学势)

- 对于 $N = \int_0^\infty f(E) D(E) dE$ $H(\varepsilon) = D(\varepsilon)$

$$Q(E) = \int_0^E H(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^E D(\varepsilon) d\varepsilon = C \int_0^E \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{2}{3} C E^{3/2}$$

$$Q''(E) = \frac{1}{2} C E^{-1/2}$$

$$N = \frac{2}{3} C E_F^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T / E_F)^2 \right]$$

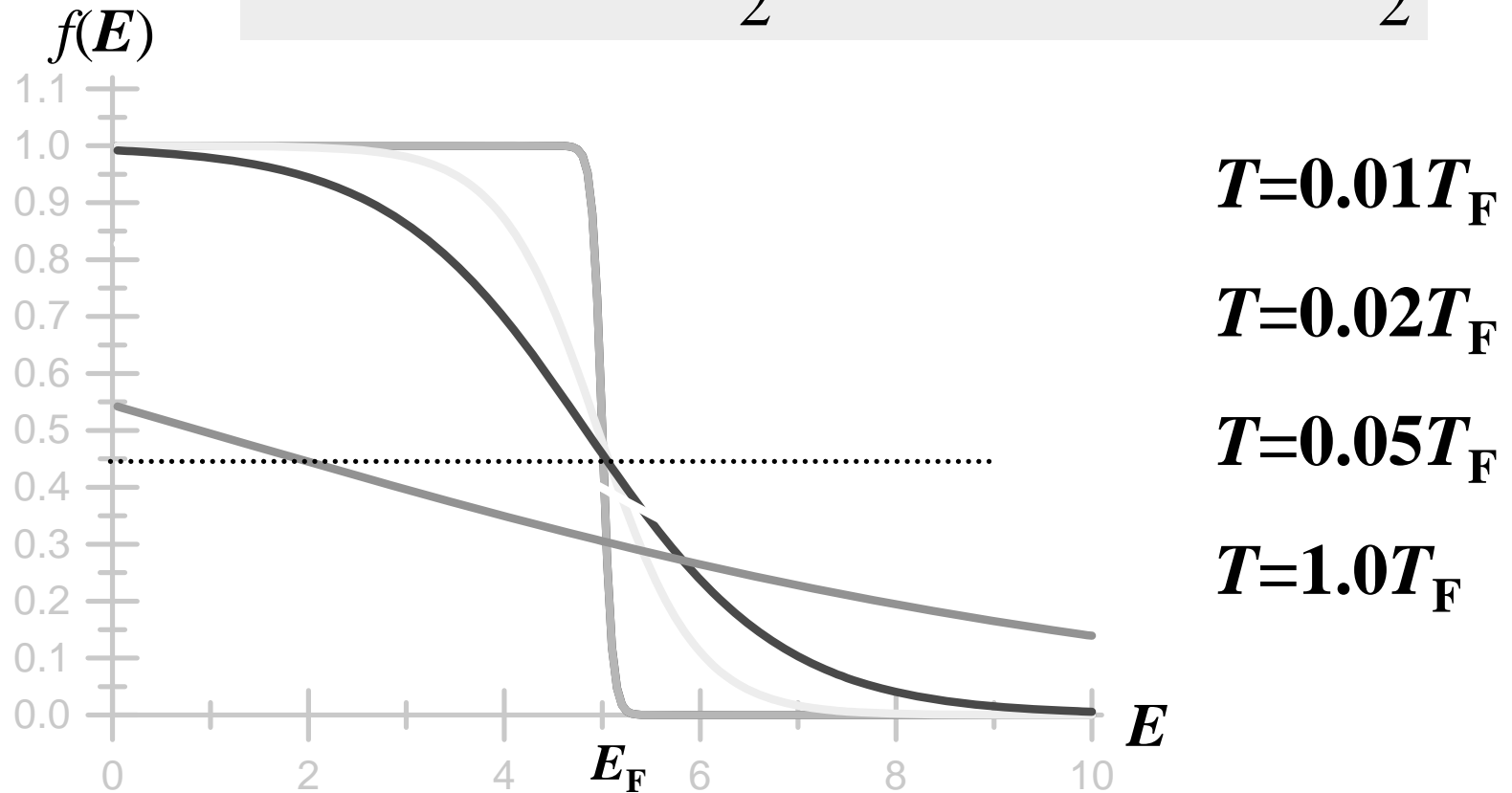
$$N = \frac{2}{3} C (E_F^0)^{3/2}$$

$$(E_F^0)^{3/2} = E_F^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (k_B T / E_F)^2 \right]$$

- 利用 $k_B T \ll E_F$ $E_F \approx E_F^0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} (k_B T / E_F^0)^2 \right]$ $T_F = 10^4 \sim 10^5 \text{K}$

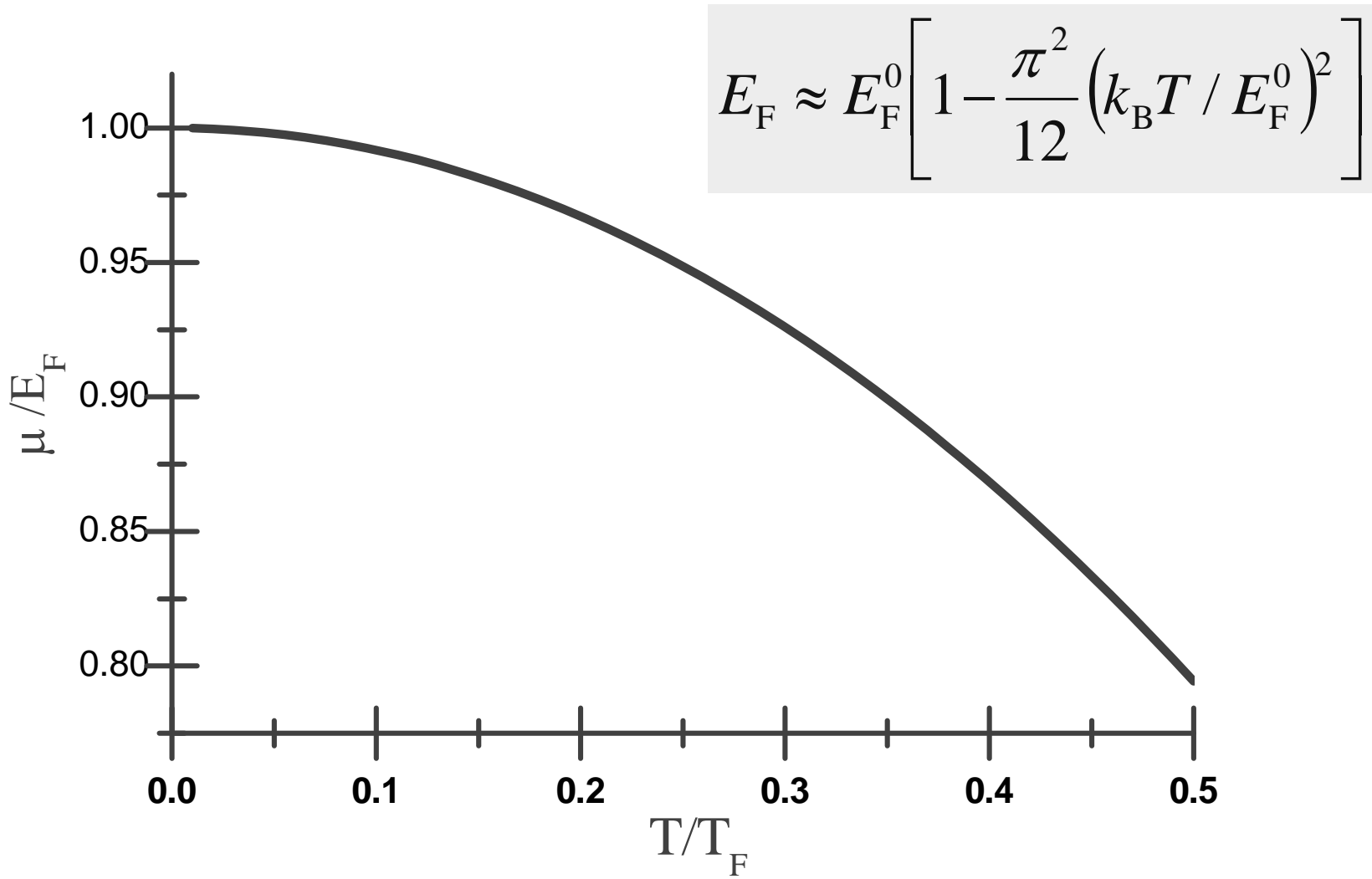
$$0 \leq f(E, T) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \leq 1 \quad f(E_F, T) = \frac{1}{2}$$

$$E < E_F, \quad f(E) > \frac{1}{2} \quad E > E_F, \quad f(E) < \frac{1}{2}$$



$$E_F \approx E_F^0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(k_B T / E_F^0 \right)^2 \right] \text{电子气的其他性质}$$

费米能级(化学势)随温度的变化



C. 总能量 ($T \ll T_F$)

$$I = Q(E_F) + \frac{\pi^2}{6} Q''(E_F) (k_B T)^2$$

• 对于 $U = \int_0^\infty f(E) D(E) E dE$

$$Q(E) = \int_0^E H(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^E \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon = C \int_0^E \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{2}{5} C E^{5/2} \quad Q''(E) = \frac{3}{2} C \sqrt{E}$$

$$U = \frac{2}{5} C E_F^{5/2} \left[1 + \frac{5}{8} \pi^2 (k_B T / E_F)^2 \right] \longleftrightarrow U = \frac{2}{5} C (E_F^0)^{5/2}$$

$$k_B T \ll E_F$$

$$\frac{U}{N} \approx \frac{3}{5} E_F^0 \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 (k_B T / E_F^0)^2 \right] \longleftrightarrow \frac{U}{N} = \frac{3}{5} E_F^0$$

• 被激发的电子能量与估计值比较

$$U = N \left(\frac{\pi^2}{4} \right) (T / T_F) k_B T \longleftrightarrow U \sim \frac{N}{2} (T / T_F) k_B T$$

——— 电子气的其他性质

电子气在外(电磁)场下如何运动?

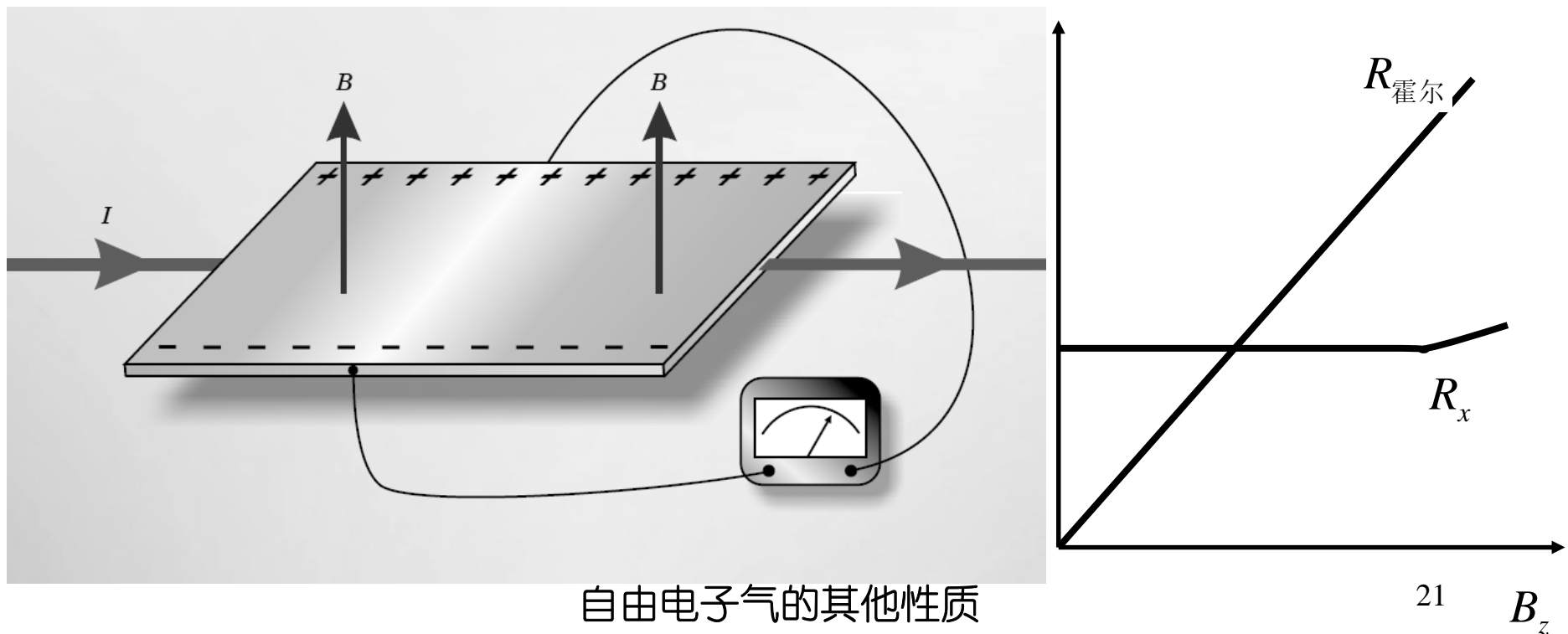
2、电磁场中的电子气

- 经典霍尔效应
 - * 用自由电子气模型，考察在外电磁场下的运动
 - * 半经典处理
- 电子气在磁场中的朗道能级
 - * 电子气在均匀磁场下的运动
 - * 量子力学处理

A. 经典霍尔效应

$$R_{\text{霍尔}} = \frac{E_y}{J_x} = R_H B_z$$

- Hall效应 (注意霍尔电阻定义的电场电流方向)
 - * R_H 霍尔系数, B_z 垂直于样品的磁感应强度
 - * 电流在x方向, 运动电荷在 B 作用下发生偏转, 在样品两边y方向堆积所建电场阻止其偏转, 直至平衡



Hall系数：半经典模型

- 电子受外力后，平均动量的变化

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} + \mathbf{F}(t)$$

- 与Drude模型相同，但现在电子在电磁场中受洛伦茨力

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- 所以，运动方程为

$$m\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)\mathbf{v} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

取磁场沿z
方向，写出
各个分量



$$v_x = -\frac{e\tau}{m} E_x - \omega_c \tau v_y$$

$$v_y = -\frac{e\tau}{m} E_y + \omega_c \tau v_x$$

$$v_z = -\frac{e\tau}{m} E_z$$

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_x = -e(E_x + Bv_y)$$

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_y = -e(E_y - Bv_x)$$

$$m \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_z = -eE_z$$

稳态 $d\mathbf{v}/dt = 0$

定义回旋频率 $\omega_c = eB/m$

- 横向电流为零, 即 $v_y = 0$

$$v_x = -\frac{e\tau}{m} E_x - \omega_c \tau v_y$$

$$v_x = -\frac{e\tau}{m} E_x$$

$$v_y = -\frac{e\tau}{m} E_y + \omega_c \tau v_x$$

- 于是

$$0 = -\frac{e\tau}{m} E_y + \omega_c \tau v_x$$

$$v_z = -\frac{e\tau}{m} E_z$$

- 用电流密度的关系 $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$

- 就有 $j_x = ne^2 \tau E_x / m = \sigma E_x$ ← 与B无关, 磁阻为零

- 另有

$$E_y = -\omega_c \tau E_x = -\frac{eB\tau}{m} E_x = -\frac{B}{ne} J_x$$

Hall系数, $R_H \equiv \frac{E_y}{j_x B}$ 子气的其他性质 $R_H = -\frac{1}{ne}$

Hall系数的微观解释

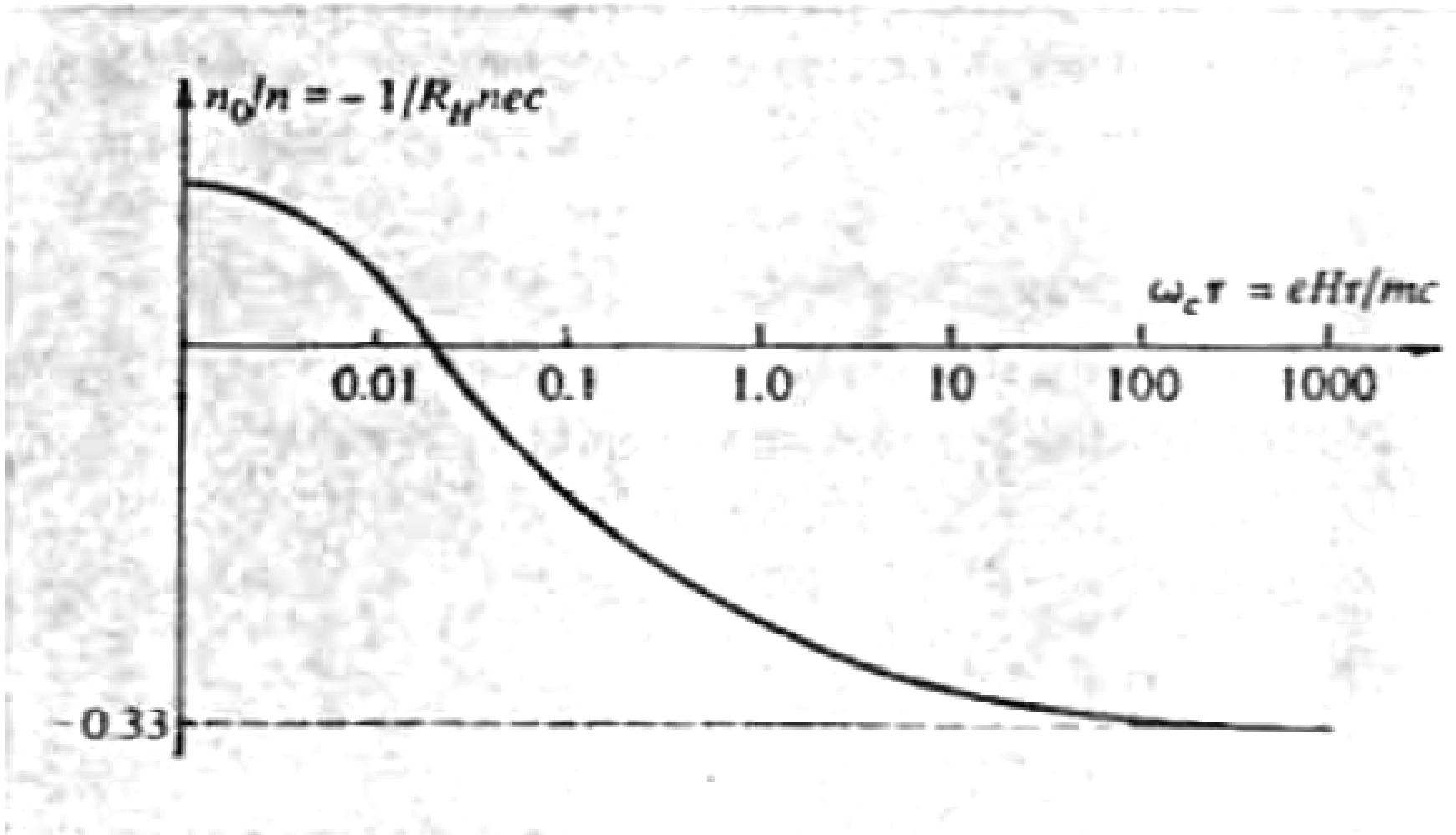
$$R_H \equiv \frac{E_y}{j_x B} \longrightarrow R_H = -\frac{1}{ne}$$

- 对于自由载流子，这个量是负的。载流子浓度低，Hall系数的数值大
- 与实验比较，一价金属较好，贵金属差，过渡金属非常差，符号都有可能相反

一些金属室温下Hall系数

- 看来有两种载流子，一种负，一种正。非自由电子气模型能说明→能带理论才能解释
 - * Hall效应常被用来测量载流子，电子还是空穴
- 1980年代以后，出现量子Hall效应现象：二维电子气在磁场下（整数量子Hall效应，分数量子Hall效应）

元素	Z	$-1/R_H ne$
Li	1	0.8
Na	1	1.0
K	1	1.1
Cu	1	1.3
Ag	1	1.3
Au	1	1.5
Be	2	-0.10
Zn	2	-1.4
Cd	2	-1.1
Al	3	0.1



- 这是Al的实验测量，说明与磁场强度有关。
R. Lueck, Phys. Stat. Sol. 18, 49 (1966)

评价：Hall系数

- 成功：
 - * 导出了Hall系数，预言预言了Hall系数与磁感应强度和弛豫时间无关
 - * Hall系数的量级基本正确
 - * 碱金属的Hall系数与实验符合得较好
- 不能解释
 - * Hall系数实际应与温度、磁场强度有关
 - * 有些材料Hall系数前符号错误

**Hall系数与实验不符的原因是什么？
是处理方式还是电子气模型？**

B. 电子气在磁场中的朗道能级(p.104)

- 电子气在均匀磁场中的运动——朗道，1930
- 没有磁场时，自由电子的哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

- 有磁场时，哈密顿量中的动量算符换成 $\mathbf{p} + q\mathbf{A}$,

$$H = -\frac{1}{2m} (\mathbf{p} + q\mathbf{A})^2$$

对电子, q 为 $-e$

- 其中 \mathbf{A} 是矢势，需要满足

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- 假定磁场方向沿 z 轴，为了满足这个关系，可取 $\mathbf{A}=(-By, 0, 0)$ ，则定态薛定鄂方程为

$$H\psi = -\frac{1}{2m} \left[(\hat{p}_x + eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \psi = E\psi$$

- 这时，由于其中不显含 x, z 坐标，在这两个方向上和自由电子一样，尝试波函数为

$$\psi = e^{i(k_x x + k_z z)} \varphi(y)$$

- 代入后可得

$$\frac{1}{2m} \left[(\hbar k_x + eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hbar^2 k_z^2 \right] \varphi(y) = E\varphi(y)$$

- 对
$$\frac{1}{2m} \left[(\hbar k_x + eBy)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \varphi(y) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) \varphi(y)$$

- 令
$$\omega_c = \frac{eB}{m}, \quad y_c = \frac{\hbar k_x}{qB}$$

- 即得

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{m}{2} \omega_c^2 (y - y_c)^2 \right] \varphi(y) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) \varphi(y)$$

- 这是中心在 y_c 的圆频率为回旋频率的谐振子方程，其解为厄米多项式，本征能量为Landau能级

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \rightarrow E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

垂直于磁场平面，电子运动是量子化

$$E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- 在磁场方向 z ，能量仍是连续的
- 但垂直于磁场平面，原来无磁场时的准连续能量，简并到分裂的所谓Landau能级，电子运动是量子化的
- 无磁场时， k 空间状态分布均匀，能量态密度

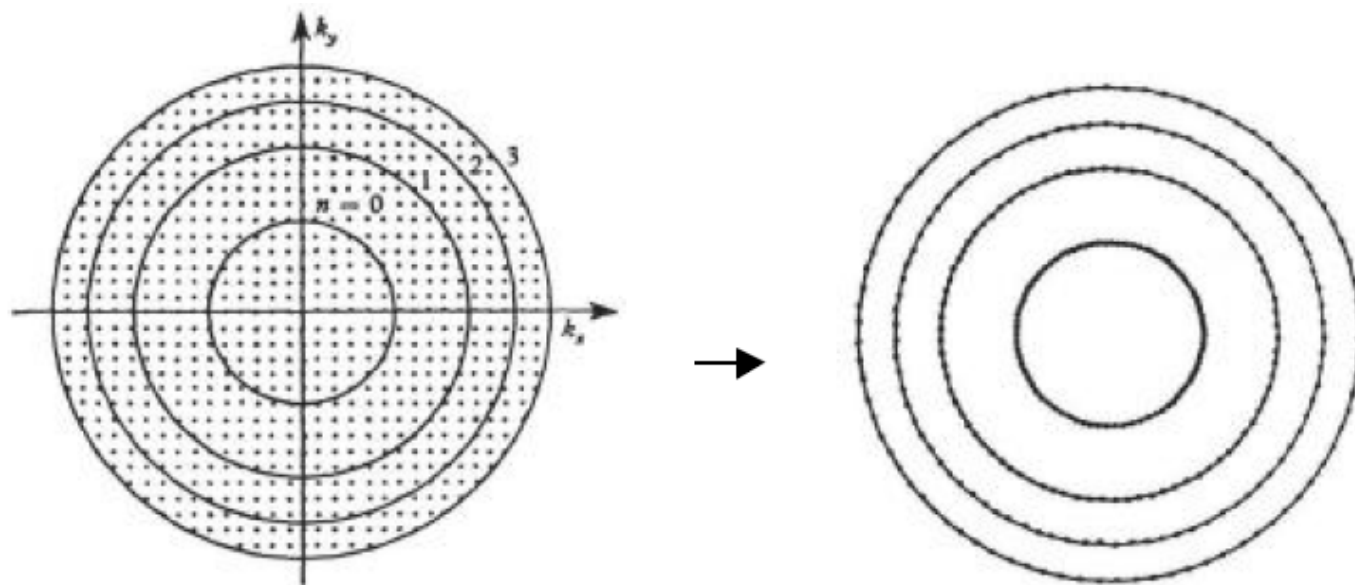
$$D(E) = C\sqrt{E}, \quad C = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2}$$

- 有磁场时，需要分别计算每个 n 的态密度，然后相加

Landau管

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Rightarrow \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

- 原来在k空间均匀分布的k点，在某方向加上均匀磁场后，沿此方向，k空间被等分成一个个管上(顶视图)。称为Landau管。原均匀分布的k点，重新分布到Landau管上→每个管上的任一横截面上电子的能量相等→简并
- 先计算每个n能级的简并度



简并度

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) \rightarrow \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$$

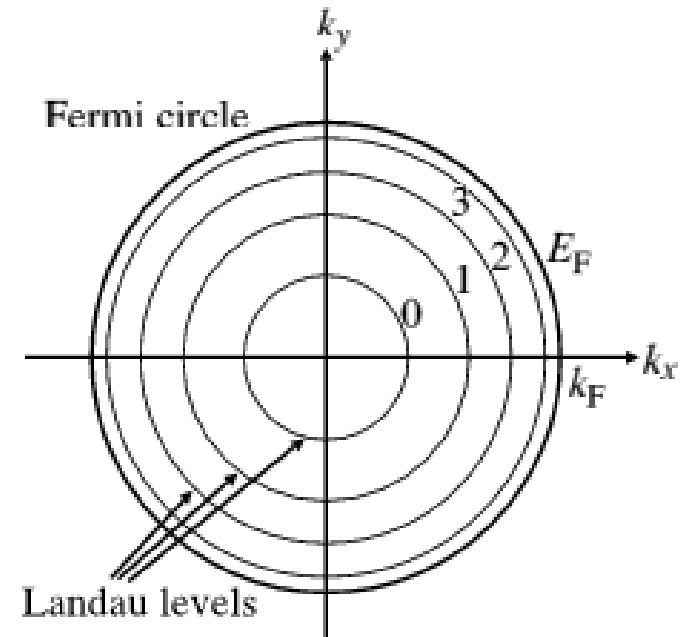
$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

- 在x-y平面，等能线是同心圆，相邻圆的面积

$$S = \int_{k_1}^{k_2} 2\pi k dk = \pi k^2 \Big|_{k_1}^{k_2}$$

$$= \pi (k_2^2 - k_1^2) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2m}{\hbar^2} = \pi \frac{2m}{\hbar^2} \hbar \omega_c$$

$$= \pi \frac{2m}{\hbar^2} \hbar \frac{eB}{m} = 2\pi \frac{eB}{\hbar}$$



- 这个面积里的状态数在无磁场时均匀，即得简并度

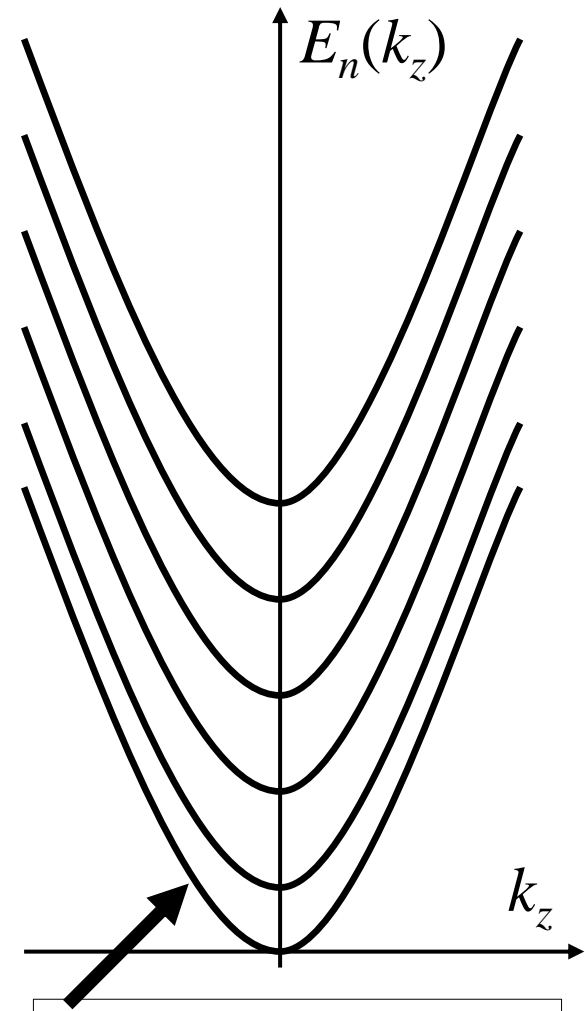
$$2\pi \frac{eB}{\hbar} \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} = L_x L_y \frac{eB}{h}$$

二维k空间状态密度

$$L_x L_y \frac{eB}{h}$$

- 这些均匀分布的k点现在分布到圆周上，简并到同一能量
- 简并度由磁场强度决定
- 简并度与n无关，每个圆周都相同，即单位面积的每个Landau能级的简并度都是 eB/h
- 原来连续的 $E(k)$ 由于磁场简并到Landau能级，成一条条一维的抛物线，Landau能级只是使之移动一个常数

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \text{ 气的其他性质}$$



B=0时的E(k)关系

态密度（有磁场时）

- 对于x-y平面，第n个Landau能级的状态数是

$$D_{xy} = L_x L_y \frac{eB}{h}$$

- 对于z，在 dk_z 范围，状态数为

$$dN_z = \left(2\right) \frac{L_z}{2\pi} dk_z$$

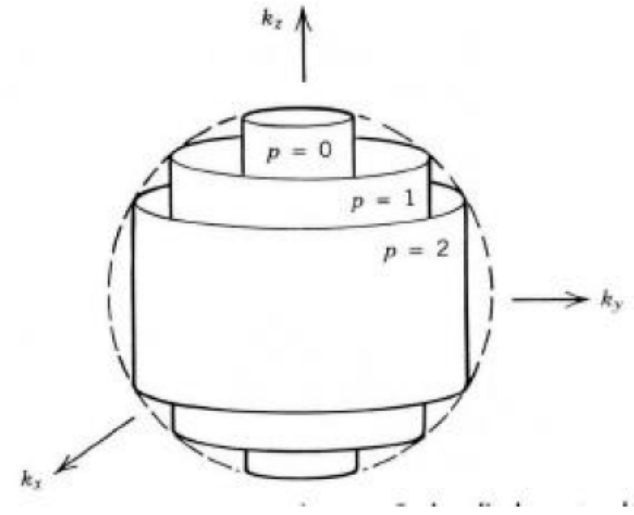
- 利用

$$E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c$$

- 可得

$$k_z = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \left[E - \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c \right]^{1/2}$$

$$dk_z = \frac{1}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \left[E - \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c \right]^{-1/2} dE$$



态密度

- 第 n 个 Landau 能级的状态密度

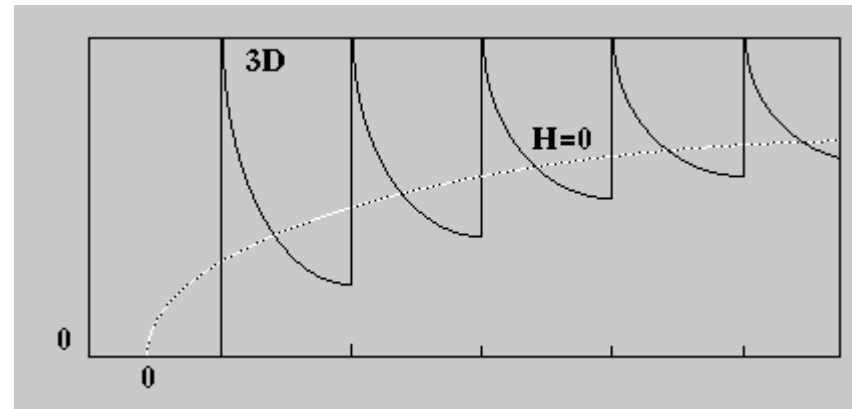
$$dN_n = D_n(E)dE = D_{xy} 2 \frac{L_z}{2\pi} 2dk_z$$

$$E > \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$$

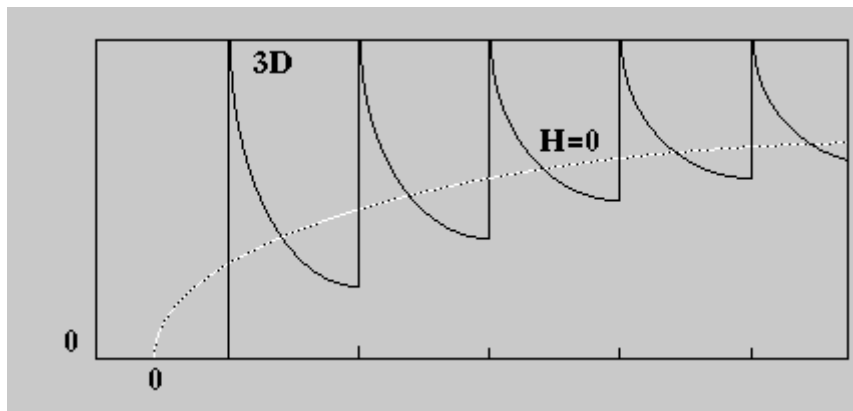
$$D_n(E) = \frac{V}{(2\pi)^2} \hbar \omega_c \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \left[E - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \right]^{-1/2}$$

- 总的态密度是

$$D(E) = \sum_{n=0}^{E > \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c} D_n(E)$$



- 能量状态密度：两部分的迭加。在x~y方向的分立能级的态密度和在z方向的连续能级的态密度，即一维的态密度与分立能级的迭加
- 一维电子气体的能量态密度 $D(E) \sim E^{-1/2}$
- 改写磁场中电子气能量关系 $\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = E - \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c$
- 于是得到磁场中电子气的态密度为



$$D(E) \sim \sum_n E_n^{-1/2} = \sum_n \left[E - \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c \right]^{-1/2}$$

自由电子气的其他性质

讨论

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Rightarrow \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

- 原来自由电子在 xy 平面连续的能级，现在是量子化的，这些分立的能级称为Landau能级
 - * Landau能级分立的物理原因是什么？→
- 如果 k_z 保持不变，则电子在 $k_x \sim k_y$ 面内；那么，如果 k_z 连续，电子在空间的轨迹就是螺旋运动
 - * 如将磁场下的电子气限制在二维空间，即限制在上面公式中的 xy 平面，再在面内建立电场使形成比如说 x 方向的电流，将会发生什么现象？→

→视野拓展→

$$R_H = \frac{V_H}{I_x} = -\frac{1}{j} \frac{h}{e^2}$$

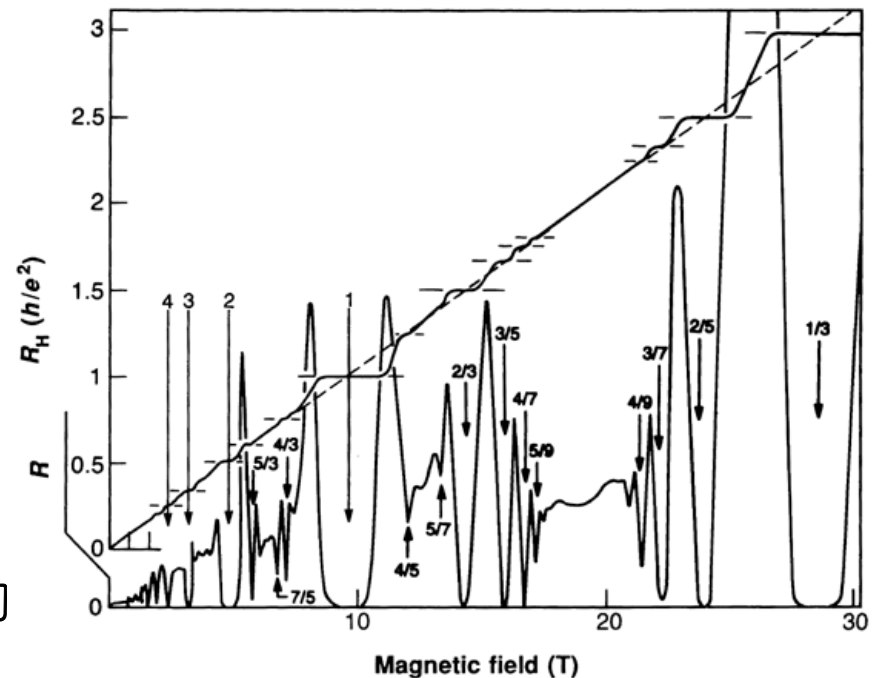
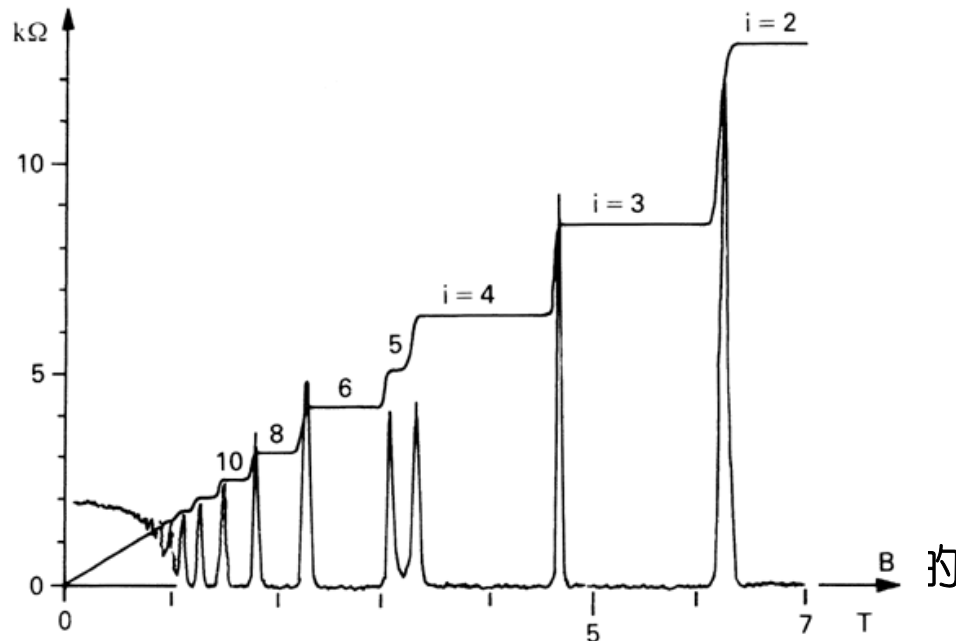
1. Landau能级分裂的物理原因是什么？
2. 如将磁场下的电子气限制在二维空间，即限制在xy平面，再在面内建立电场使形成比如说x方向的电流，将会产生Hall效应
3. 如果把磁场加大、电子密度减少到极至，将有可能发生什么现象？

→量子Hall效应

量子Hall效应

$$R_H = \frac{V_H}{I_x} = -\frac{1}{j} \frac{h}{e^2}$$

- 整数量子霍尔效应(1985诺奖): von Klitzing, 1.5K, 18T, $10^{13}/\text{cm}^2$, PRL45, 494 (1980)
- 分数量子霍尔效应(1985诺奖): Tsui, Stoermer, 0.5K, 20T, $10^{11}/\text{cm}^2$, PRL48, 1559 (1982); Laughlin解释, PRL50, 1395 (1983)



小结：兼答本讲目的中所提两个问题

- 低温下，金属自由电子性质与基态有何不同？
 - * 有限温度费米分布函数不再简单地等于零或一，这导致积分困难。在极低温条件下，这个困难可由 Sommerfeld 积分解决，得到
 - # 比热与温度成正比，总能与温度的二次方成正比
 - # 费米能级随温度升高而降低
- 自由电子气在电、磁场下如何运动？
 - * Hall 效应，Hall 系数与 B 和弛豫时间无关
 - * 磁场下的自由电子气，在垂直于磁场的平面内，会由无外磁场时的连续能级分裂成所谓的朗道能级

新引入概念

- Landau能级

习题

3. 求低温一维、二维电子气体的费米能级和电子气体平均能量，并与零温度的结果进行比较。

$$E_F \approx E_F^0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right]$$

课堂讨论题：为什么温度越高，费米能级反而越低？其物理意义是什么？