上讲回顾

- 用半经典模型解决了**Drude**模型对比热高估的问题——高估了参与热激发的电子数目
- 模型：**Sommerfeld**仍然沿用**Drude**模型的基本假定，但用量子力学来处理金属自由电子气
  - * 给出了基态（T=0）的重要性质，引入即使超出自由电子气也仍然有效的一些重要概念
    - # 费米能级、状态密度

本讲目的：电子气在低温和外场下

1. 低温下金属自由电子性质与基态有何不同?
2. 自由电子气在电磁场下如何运动?

第3讲、自由电子气的其他性质

1. 自由电子气低温性质(利用低温费米分布特性)
   * 比热（低温时，电子贡献才是主要的）
   * 费米能级、总能（Sommerfeld积分）
2. 电磁场中的电子气
   * Hall效应（半经典）
   * 朗道能级（量子）

相比于基态，极低温下的电子气性质会有哪些不同？

1、自由电子气低温 ($k_BT<<E_F$)性质

- 引进温度，即引进费米分布

$$f(E)=\frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1}$$

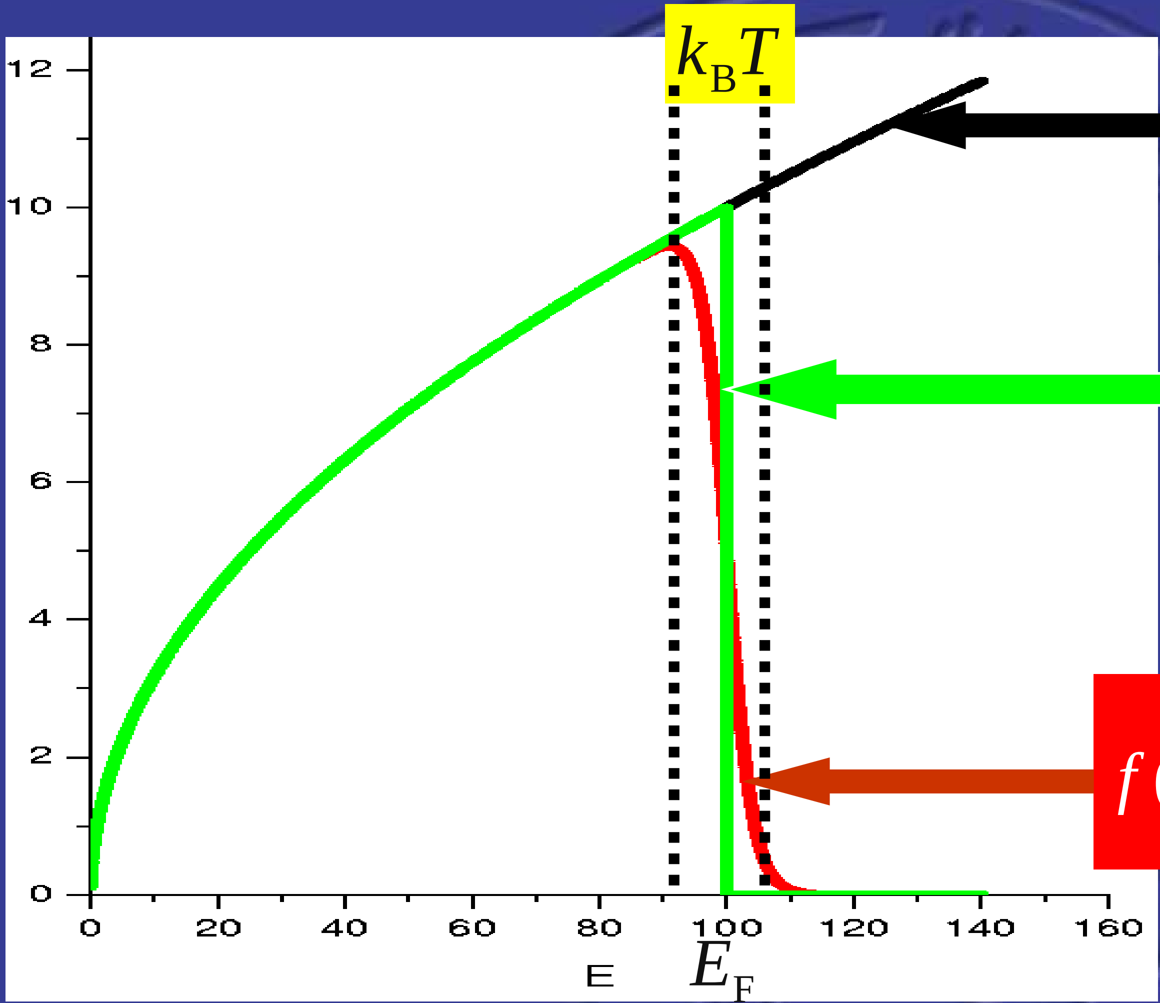
- 用总电子数确定Fermi能级

$$N=\int_0^\infty f(E)D(E)dE=\begin{cases} C\int_0^{E_F^0}\sqrt{E}dE, & T=0 \\ C\int_0^\infty f(E)\sqrt{E}dE, & T\neq 0 \end{cases}$$

- 确定电子气能量

$$U=\int_0^\infty f(E)D(E)EdE=\begin{cases} C\int_0^{E_F^0}E^{3/2}dE, & T=0 \\ C\int_0^\infty f(E)E^{3/2}dE, & T\neq 0 \end{cases}$$

$T \neq 0$ 电子被热激发，看被积函数



$$D(E) = C\sqrt{E}$$

$$f(E)D(E)\underset{E<E_F}{=} C\sqrt{E}$$

$$f(E)D(E)\underset{E>E_F}{=} 0$$

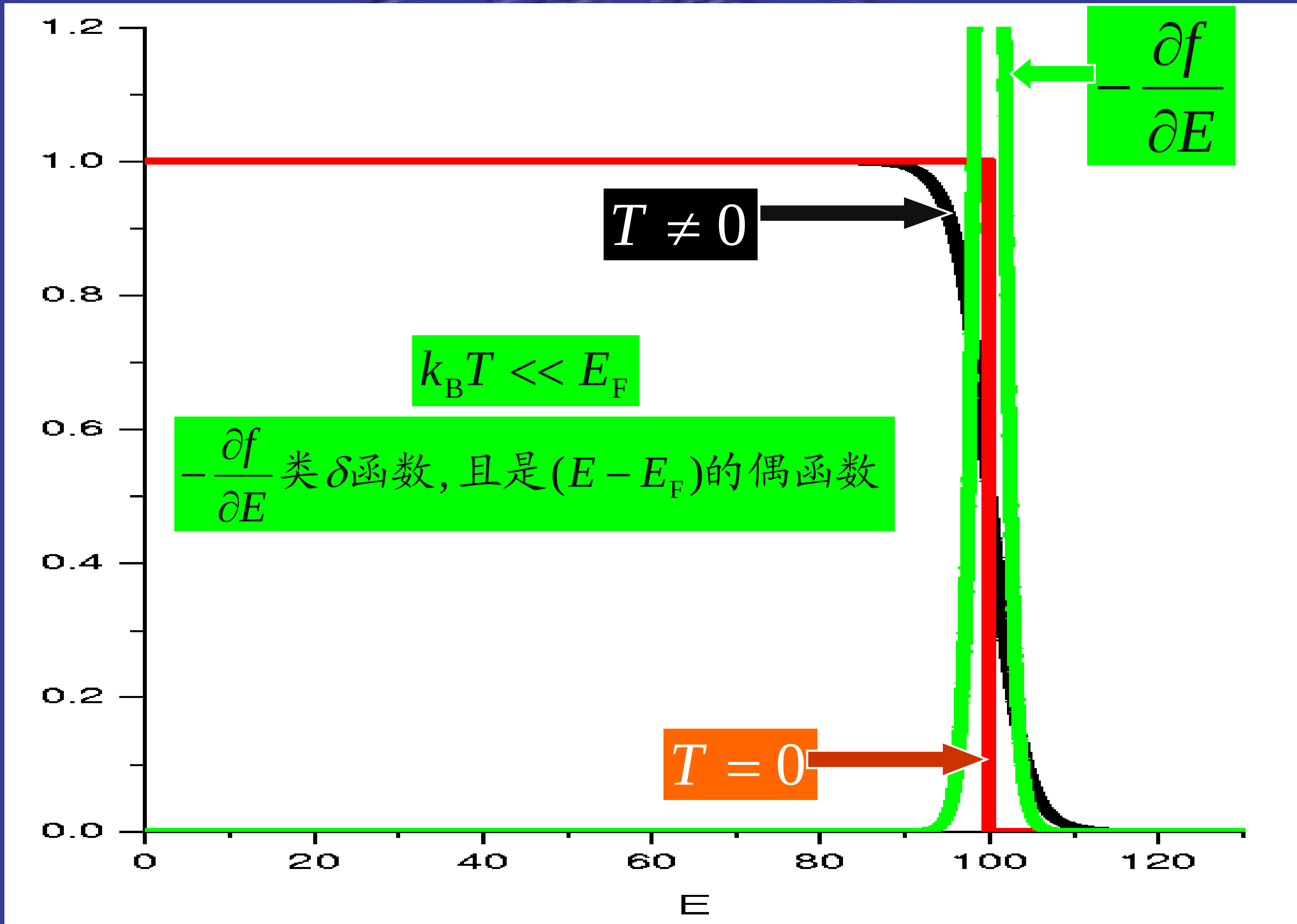
$$f(E)D(E) = \frac{C\sqrt{E}}{e^{(E-E_F)/k_B T}+1}$$

$$N = \int_0^{\infty} f(E)D(E)dE$$

$$U = \int_0^{\infty} f(E)D(E)EdE$$

子气的其

低温时费米分布的数学性质



$-\mathrm{d}f(E)/\mathrm{d}E$的对称性

- 对费米分布，其对E的导数总是$x=(E-\mu)$的偶函数
- 当$T\to 0$时，才是delta函数

$$x=(E-\mu)/k_{\mathrm{B}}T$$

$$f(E)=\frac{1}{e^{(E-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}+1}=\frac{1}{e^{x}+1}=f(x)$$

$$-\frac{df}{dx}=\frac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^{2}}, x\geq 0\\[2ex] \dfrac{e^{-|x|}}{\left(e^{-|x|}+1\right)^{2}}, x<0\end{cases}$$

A. 比热($k_BT<<E_F$)

- 总能量 $$U=\int_0^\infty D(E)f(E)EdE$$
- 总电子数 $$N=\int_0^\infty f(E)D(E)dE$$
$$E_F N=\int_0^\infty E_F f(E)D(E)dE$$
- 对这两个式子求导，得 $$C_V^{el}=\frac{\partial U}{\partial T}=\int_0^\infty dEED(E)\frac{\partial f}{\partial T}$$
$$0=\int_0^\infty dEE_F D(E)\frac{\partial f}{\partial T}$$
- 相减后，得 $$C_V^{el}=\int_0^\infty dE(E-E_F)D(E)\frac{\partial f}{\partial T}$$
- 根据(E-E_F)df/dT的类δ函数性质，可以近似得到
$$C_V^{el}\approx D(E_F)\int_0^\infty dE(E-E_F)\frac{\partial f}{\partial T}$$

- 对费米分布求导 $\dfrac{\partial f}{\partial T}=\dfrac{E-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T^{2}}\dfrac{e^{(E-E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}}{\left[e^{(E-E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}+1\right]^{2}}$

- 进行变量替换，$x=\left(E-E_{\mathrm{F}}\right)/k_{\mathrm{B}}T$

$$C_V^{\mathrm{el}}\approx D(E_{\mathrm{F}})\int_0^{\infty}dE\left(E-E_{\mathrm{F}}\right)\frac{\partial f}{\partial T}=k_{\mathrm{B}}^{2}TD(E_{\mathrm{F}})\int_{-E_{\mathrm{F}}/k_{\mathrm{B}}T}^{\infty}dx x^{2}\frac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

- 低温时，可将积分下限推至负无穷大，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx x^{2}\frac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{\pi^{2}}{3}$$

- 于是 $C_V^{\mathrm{el}}=\dfrac{\pi^{2}}{3}k_{\mathrm{B}}^{2}TD(E_{\mathrm{F}})=\dfrac{\pi^{2}}{3}k_{\mathrm{B}}^{2}T\dfrac{3}{2E_{\mathrm{F}}}N=\dfrac{\pi^{2}}{2}Nk_{\mathrm{B}}\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}$

- 与前面的半经典估计比较 $C_V^{\mathrm{el}}\approx Nk_{\mathrm{B}}\dfrac{T}{T_{\mathrm{F}}}$

$$C_V^{\mathrm{el}}=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{\pi^2}{2}Nk_B\frac{k_BT}{E_F^0}=\frac{\pi^2}{2}Nk_B\frac{T}{T_F}$$

与定性的结果仅差常数因子

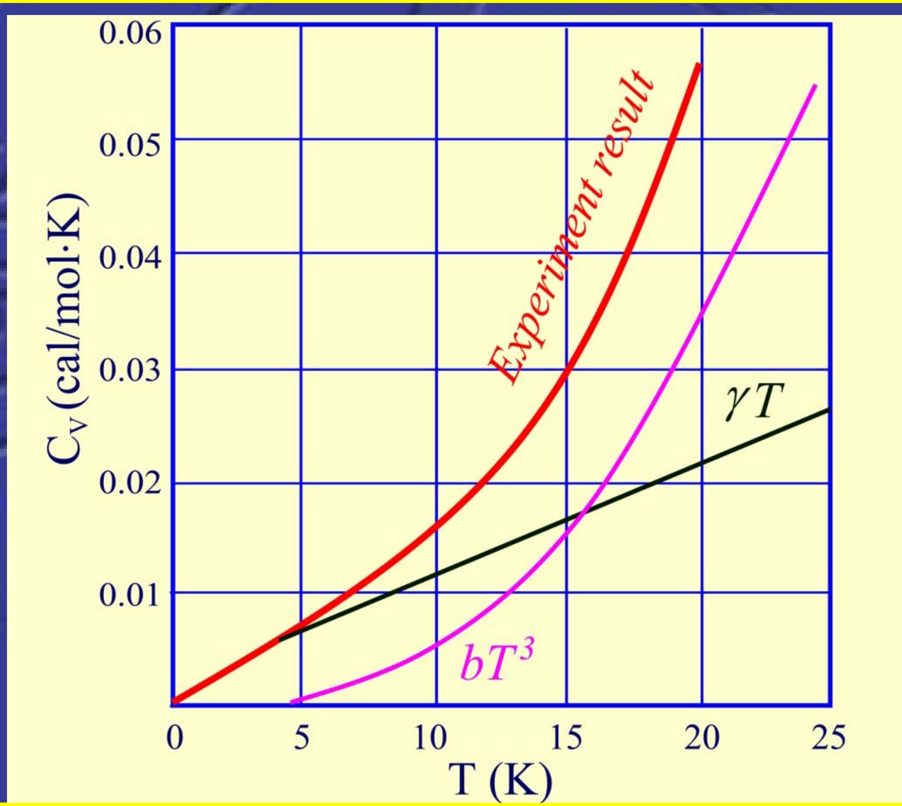
定性的解释是正确的，即只有Fermi面附近的电子被激发！

$$C_V^{\mathrm{el}}\propto T$$

- 低温时，电子气对热容的贡献很小
- 并不只适用于自由电子气。电子许可能级形成能带时也是正确的

固体比热的实验结果

$$C_V = \gamma T + bT^3 = C_V^{\text{el}} + C_V^{\text{lat}}$$



只有在极低温度下，电子对比热的贡献才重要

附录：Sommerfeld积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}H(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$Q(E)\equiv\int_{-\infty}^{E}H(\varepsilon)d\varepsilon$$

- 常遇这样的积分，引入函数
  - * 其中$H(E)$在当E趋向负无穷大时趋向零
- 对I作分部积分

$$I=Q(\varepsilon)f(\varepsilon)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}Q(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)d\varepsilon$$

  - * 第一项，$-\infty$时$Q(E)$积分区间为零，$+\infty$时$f(E)$为零
  - * 第二项，$-df/dE$是中心在E_F处的类δ函数，宽度约k_BT，是$(E-E_F)$的偶函数，将$Q(E)$在E_F附近展开到二级近似，得到

$$Q(\varepsilon)=Q(E_F)+(\varepsilon-E_F)Q'(E_F)+\frac{1}{2}(\varepsilon-E_F)^2Q''(E_F)$$

  - * 该展开的第二项是$(E-E_F)$的奇函数，为零

- 把Q的展开式(保留到二次)

$$Q(\varepsilon)=Q(E_{\mathrm{F}})+\frac{1}{2}(\varepsilon-E_{\mathrm{F}})^2 Q''(E_{\mathrm{F}})$$

- 代入

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}Q(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)d\varepsilon$$

- 第1项积分是$Q(E_{\mathrm{F}})$，第2项与前面求比热的积分形式类似，不同的仅是$k_{\mathrm{B}}T$因子，仍然作同样的变量替换，利用

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx x^2\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\pi^2}{3}$$

- 就可得sommerfeld积分

$$I=Q(E_{\mathrm{F}})+\frac{\pi^2}{6}Q''(E_{\mathrm{F}})\left(k_{\mathrm{B}}T\right)^2$$

B. 费米能级($T<<T_F$)

$$I = Q(E_{\mathrm{F}}) + \frac{\pi^2}{6} Q''(E_{\mathrm{F}})(k_{\mathrm{B}}T)^2$$

- 低温时($T<<T_F$)的费米能级(化学势)
- 对于 $N = \int_0^\infty f(E)D(E)dE$

$$H(\varepsilon) = D(\varepsilon)$$

$$Q(E) = \int_0^E H(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^E D(\varepsilon)d\varepsilon = C\int_0^E \sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = \frac{2}{3}CE^{3/2}$$

$$Q''(E) = \frac{1}{2}CE^{-1/2}$$

$$N = \frac{2}{3}CE_{\mathrm{F}}^{3/2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}(k_{\mathrm{B}}T/E_{\mathrm{F}})^2\right]$$

$$N = \frac{2}{3}C\left(E_{\mathrm{F}}^0\right)^{3/2}$$

$$\left(E_{\mathrm{F}}^0\right)^{3/2} = E_{\mathrm{F}}^{3/2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}(k_{\mathrm{B}}T/E_{\mathrm{F}})^2\right]$$

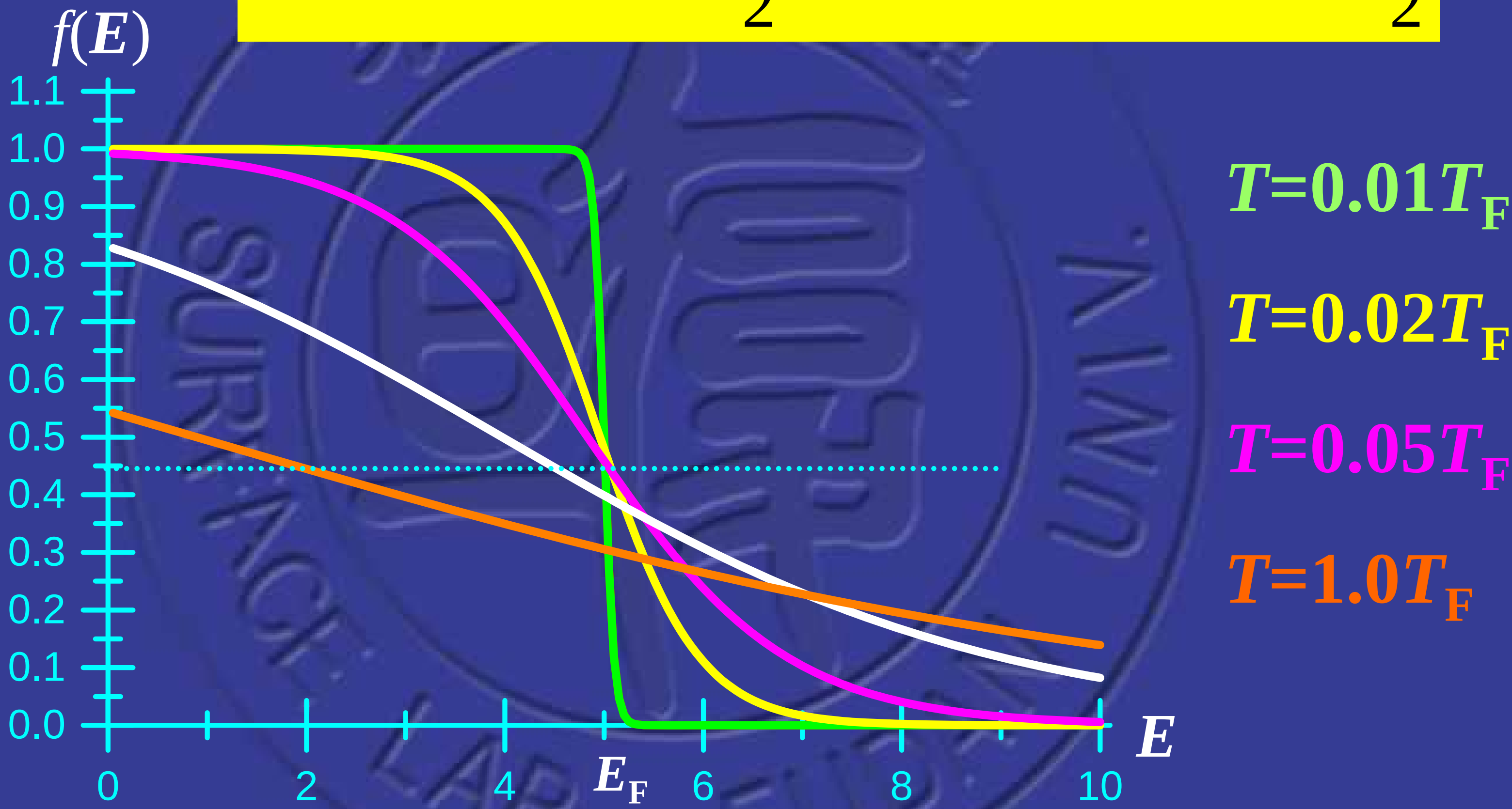
- 利用 $k_BT<<E_F$

$$E_{\mathrm{F}} \approx E_{\mathrm{F}}^0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}(k_{\mathrm{B}}T/E_{\mathrm{F}}^0)^2\right]$$

$T_F=10^4\sim10^5$K

$$0 \le f(E,T) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T}+1} \le 1 \qquad f(E_F,T) = \frac{1}{2}$$

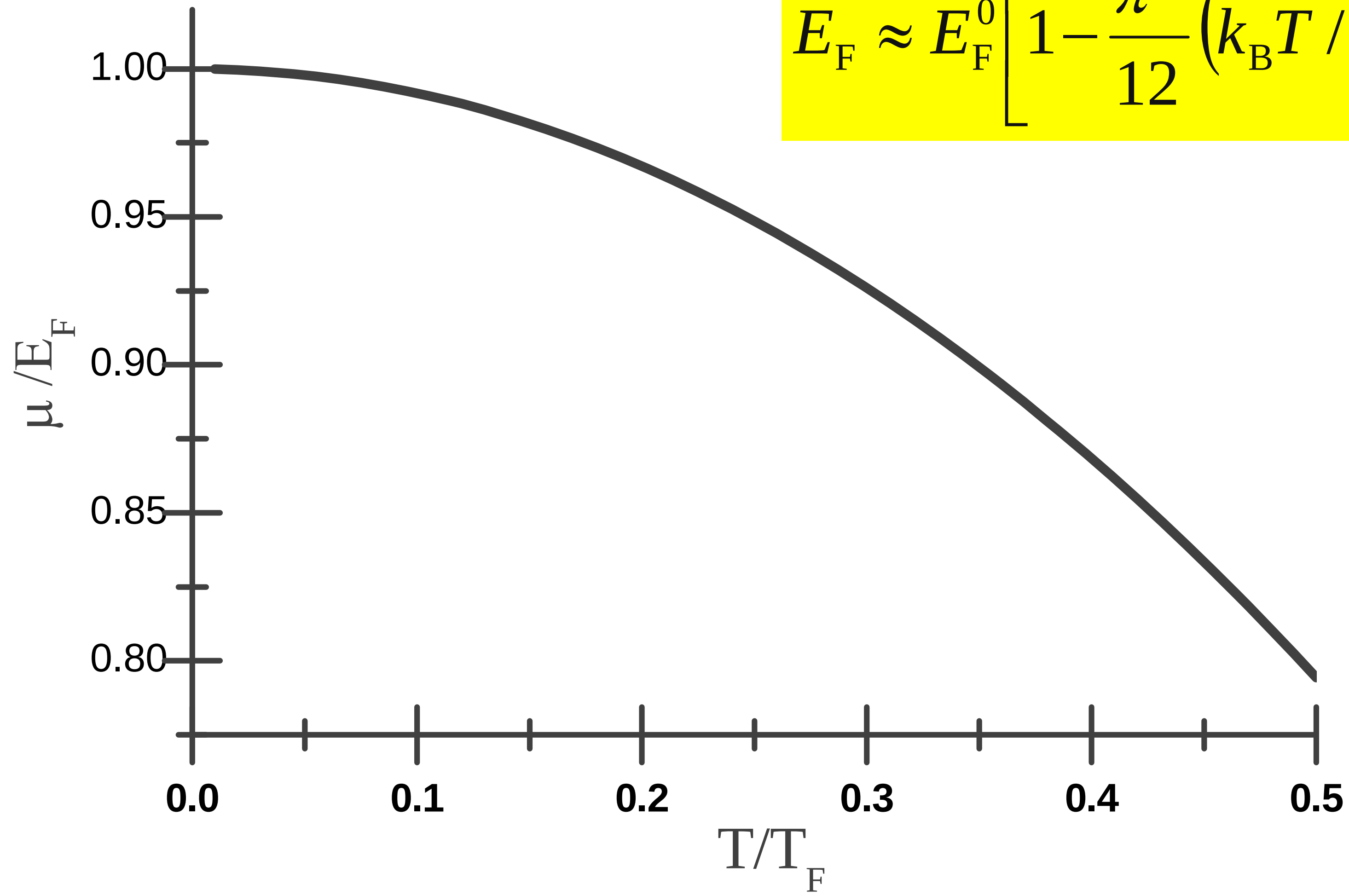
$$E < E_F, \quad f(E) > \frac{1}{2} \qquad E > E_F, \quad f(E) < \frac{1}{2}$$



$$E_F \approx E_F^0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(k_B T / E_F^0 \right)^2 \right]$$

费米能级(化学势)随温度的变化

$$E_F \approx E_F^0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(k_B T / E_F^0\right)^2\right]$$



C. 总能量($T<<T_F$)

$$I=Q(E_F)+\frac{\pi^2}{6}Q''(E_F)(k_BT)^2$$

- 对于 $U=\int_0^\infty f(E)D(E)EdE$

$$Q(E)=\int_0^E H(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^E \varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon=C\int_0^E \varepsilon^{3/2}d\varepsilon=\frac{2}{5}CE^{5/2}$$

$$Q''(E)=\frac{3}{2}C\sqrt{E}$$

$$U=\frac{2}{5}CE_F^{5/2}\left[1+\frac{5}{8}\pi^2(k_BT/E_F)^2\right] \longleftrightarrow U=\frac{2}{5}C\left(E_F^0\right)^{5/2}$$

$$k_BT<<E_F$$

$$\frac{U}{N}\approx\frac{3}{5}E_F^0\left[1+\frac{5}{12}\pi^2\left(k_BT/E_F^0\right)^2\right] \longleftrightarrow \frac{U}{N}=\frac{3}{5}E_F^0$$

- 被激发的电子能量与估计值比较

$$U=N\frac{\pi^2}{4}(T/T_F)k_BT \longleftrightarrow U\sim\frac{N}{2}(T/T_F)k_BT$$

电子气在外(电磁)场下如何运动？

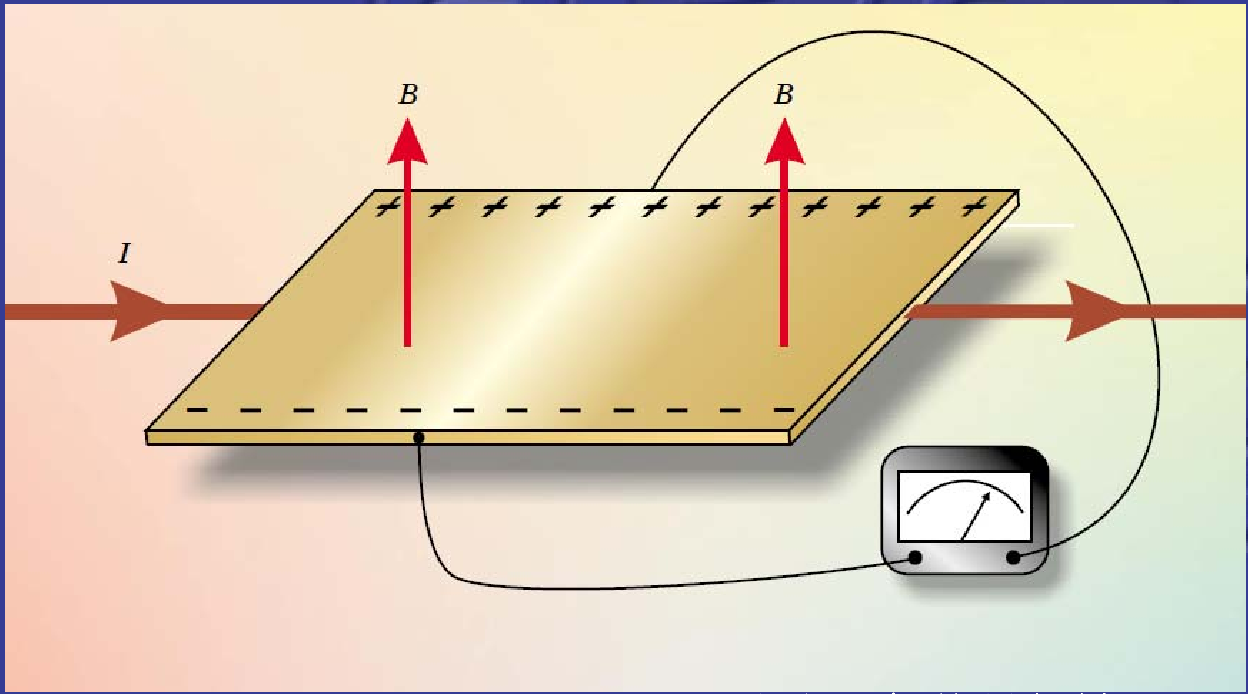
2、电磁场中的电子气

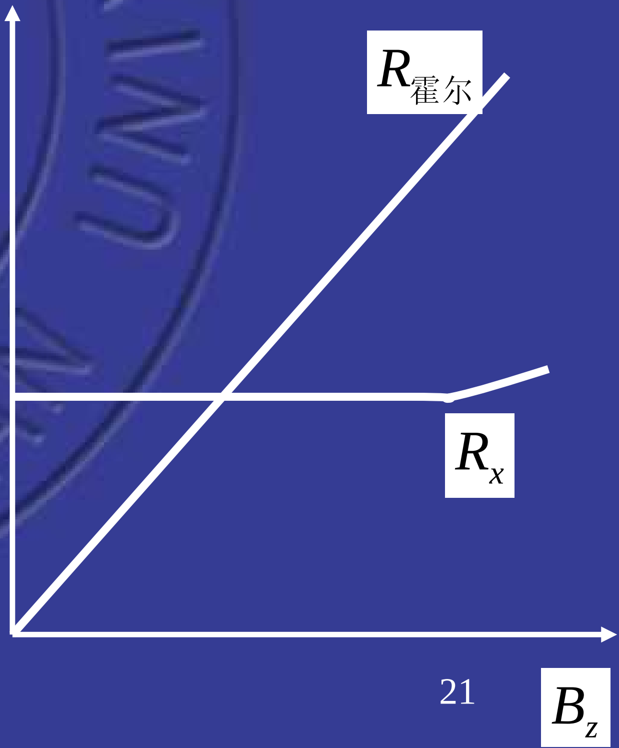
- 经典霍尔效应
  - * 用自由电子气模型，考察在外电磁场下的运动
  - * 半经典处理
- 电子气在磁场中的朗道能级
  - * 电子气在均匀磁场下的运动
  - * 量子力学处理

A. 经典霍尔效应

$$R_{\text{霍尔}} = \frac{E_y}{J_x} = R_H B_z$$

- **Hall效应 (注意霍尔电阻定义的电场电流方向)**
  - * R_H霍尔系数，B_z垂直于样品的磁感应强度
  - * 电流在x方向，运动电荷在B作用下发生偏转，在样品两边y方向堆积所建电场阻止其偏转，直至平衡





Hall系数：半经典模型

- 电子受外力后，平均动量的变化

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} + \mathbf{F}(t)$$

- 与Drude模型相同，但现在电子在电磁场中受洛伦茨力

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- 所以，运动方程为

$$m\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)\mathbf{v} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

取磁场沿z方向，写出各个分量

$$m\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{\tau}\right)v_x=-e\left(E_x+Bv_y\right)$$

$$m\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{\tau}\right)v_y=-e\left(E_y-Bv_x\right)$$

$$m\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{\tau}\right)v_z=-eE_z$$

稳态 $d\mathbf{v}/dt=0$

定义回旋频率 $\omega_c=eB/m$

$$v_x=-\frac{e\tau}{m}E_x-\omega_c\tau v_y$$

$$v_y=-\frac{e\tau}{m}E_y+\omega_c\tau v_x$$

$$v_z=-\frac{e\tau}{m}E_z$$

- 横向电流为零，即 $v_y = 0$

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x - \omega_c \tau v_y$$

$$v_y = -\frac{e\tau}{m}E_y + \omega_c \tau v_x$$

$$v_z = -\frac{e\tau}{m}E_z$$

- 于是

$$v_x = -\frac{e\tau}{m}E_x$$

$$0 = -\frac{e\tau}{m}E_y + \omega_c \tau v_x$$

- 用电流密度的关系 $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$
- 就有 $j_x = ne^2\tau E_x / m = \sigma E_x$ ← 与B无关,磁阻为零
- 另有

$$E_y = -\omega_c \tau E_x = -\frac{eB\tau}{m}E_x = -\frac{B}{ne}J_x$$

Hall系数，$R_H \equiv \dfrac{E_y}{j_x B}$

$$R_H = -\frac{1}{ne}$$

Hall系数的微观解释

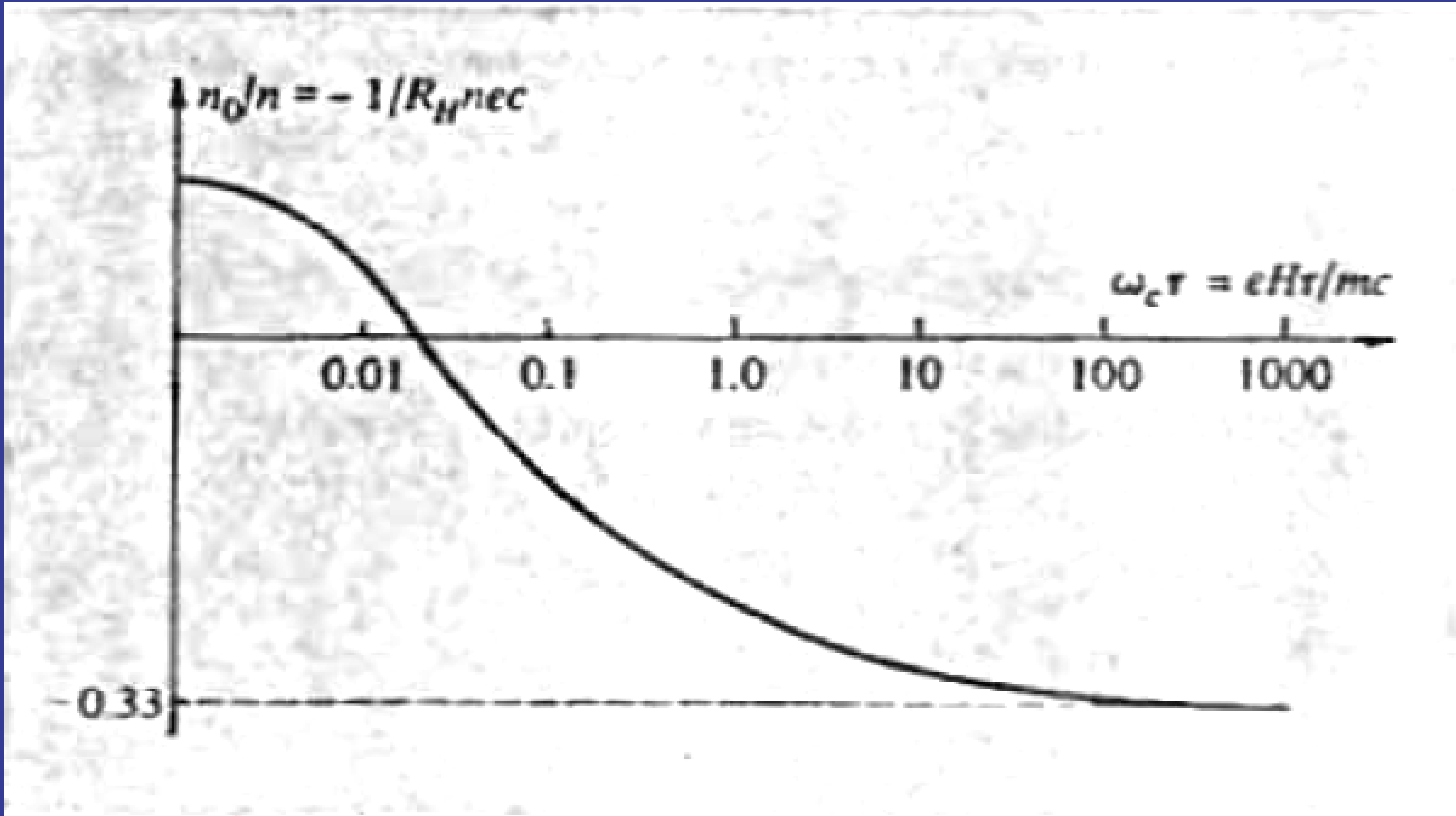
$$R_H \equiv \frac{E_y}{j_x B} \Rightarrow R_H = -\frac{1}{ne}$$

- 对于自由载流子，这个量是负的。载流子浓度低，Hall系数的数值大
- 与实验比较，一价金属较好，贵金属差，过渡金属非常差，符号都有可能相反

一些金属室温下Hall系数

- 看来有两种载流子，一种负，一种正。非自由电子气模型能说明→能带理论才能解释
  - * Hall效应常被用来测量载流子，电子还是空穴
- 1980年代以后，出现量子Hall效应现象：二维电子气在磁场下（整数量子Hall效应，分数量子Hall效应）

元素	Z	$-1/R_H ne$
Li	1	0.8
Na	1	1.0
K	1	1.1
Cu	1	1.3
Ag	1	1.3
Au	1	1.5
Be	2	-0.10
Zn	2	-1.4
Cd	2	-1.1
Al	3	0.1



- 这是Al的实验测量，说明与磁场强度有关。

R. Lueck, Phys. Stat. Sol. 18, 49 (1966)

评价：Hall系数

- 成功:
  * 导出了**Hall**系数，预言预言了**Hall**系数与磁感应强度和弛豫时间无关
  * **Hall**系数的量级基本正确
  * 碱金属的**Hall**系数与实验符合得较好
- 不能解释
  * **Hall**系数实际应与温度、磁场强度有关
  * 有些材料**Hall**系数前符号错误

Hall系数与实验不符的原因是什么？是处理方式还是电子气模型？

B. 电子气在磁场中的朗道能级(p.104)

- 电子气在均匀磁场中的运动——朗道，1930
- 没有磁场时，自由电子的哈密顿量为

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

- 有磁场时，哈密顿量中的动量算符换成**p**+q**A**，

$$H=-\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}+q\mathbf{A}\right)^2$$

对电子，q为$-e$

- 其中**A**是矢势，需要满足

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- 假定磁场方向沿z轴，为了满足这个关系，可取$A=(-By, 0, 0)$，则定态薛定鄂方程为

$$H\psi = -\frac{1}{2m}\left[\left(\hat{p}_x + eBy\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right]\psi = E\psi$$

- 这时，由于其中不显含x, z坐标，在这两个方向上和自由电子一样，尝试波函数为

$$\psi = e^{i\left(k_x x + k_z z\right)}\varphi\left(y\right)$$

- 代入后可得

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\hbar k_x + eBy\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hbar^2 k_z^2\right]\varphi\left(y\right) = E\varphi\left(y\right)$$

- 对 $$\frac{1}{2m}\left[\left(\hbar k_x + eBy\right)^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\varphi(y) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\varphi(y)$$
- 令 $$\omega_c = \frac{eB}{m},\quad y_c = \frac{\hbar k_x}{qB}$$
- 即得

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{m}{2}\omega_c^2\left(y - y_c\right)^2\right]\varphi(y) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\varphi(y)$$

- 这是中心在y_c的圆频率为回旋频率的谐振子方程，其解为厄米多项式，本征能量为**Landau**能级

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c,\quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \rightarrow E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

垂直于磁场平面，电子运动是量子化

$$E=\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c,\quad n=0,1,2,\ldots$$

- 在磁场方向z，能量仍是连续的
- 但垂直于磁场平面，原来无磁场时的准连续能量，简并到分裂的所谓**Landau**能级，电子运动是量子化的
- 无磁场时，**k**空间状态分布均匀，能量态密度

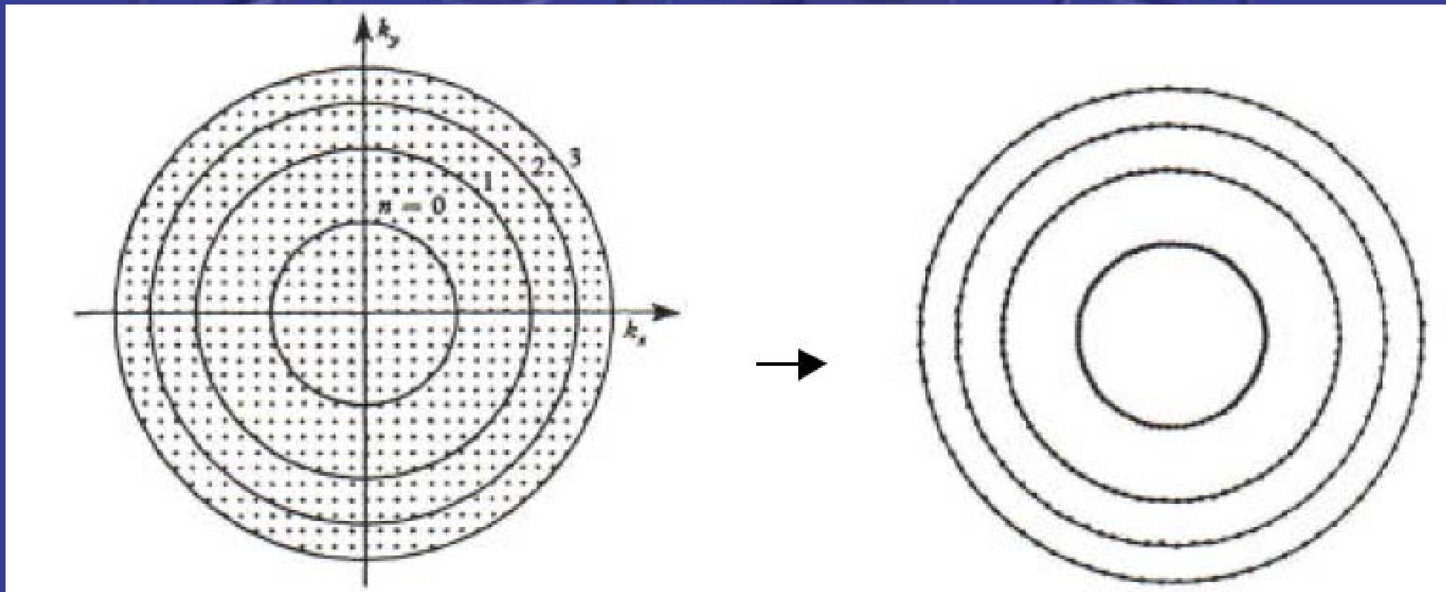
$$D(E)=C\sqrt{E},\qquad C=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

- 有磁场时，需要分别计算每个n的态密度，然后相加

Landau管

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\Rightarrow\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c+\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

- 原来在k空间均匀分布的k点，在某方向加上均匀磁场后，沿此方向，k空间被等分成一个个管上(顶视图)。称为Landau管。原均匀分布的k点，重新分布到Landau管上→每个管上的任一横截面上电子的能量相等→ 简并
- 先计算每个*n*能级的简并度



简并度

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2\right)\rightarrow\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

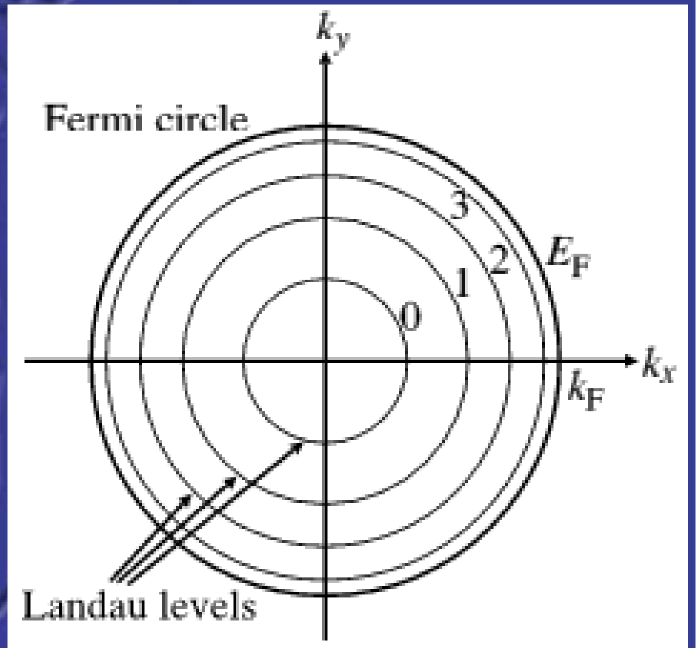
$$\omega_c=\frac{eB}{m}$$

- 在x-y平面，等能线是同心圆，相邻圆的面积

$$S=\int_{k_1}^{k_2}2\pi k dk=\pi k^2\Big|_{k_1}^{k_2}$$

$$=\pi\left(k_2^2-k_1^2\right)\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2m}{\hbar^2}=\pi\frac{2m}{\hbar^2}\hbar\omega_C$$

$$=\pi\frac{2m}{\hbar^2}\hbar\frac{eB}{m}=2\pi\frac{eB}{\hbar}$$



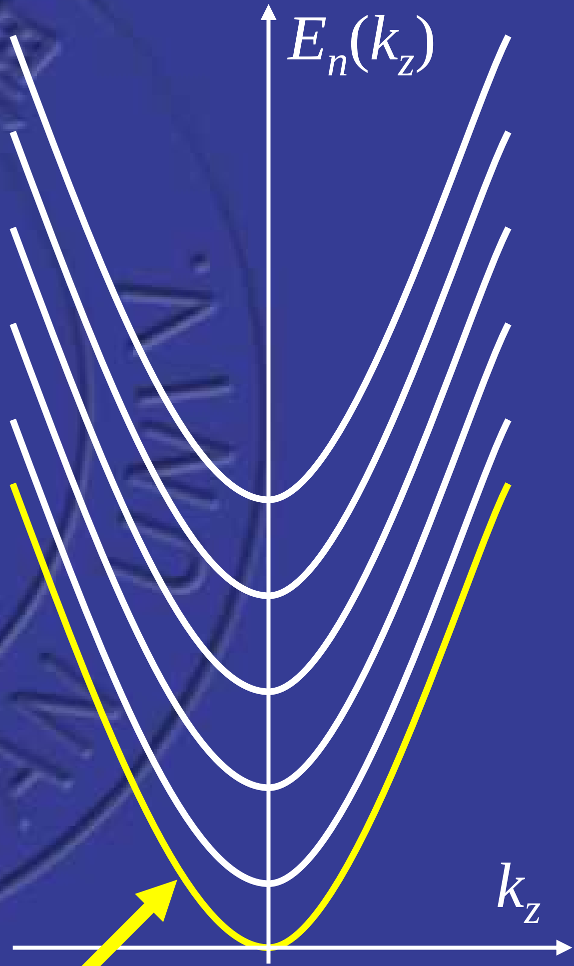
- 这个面积里的状态数在无磁场时均匀，即得简并度

$$2\pi\frac{eB}{\hbar}\frac{L_xL_y}{(2\pi)^2}=L_xL_y\frac{eB}{h}$$

二维k空间状态密度

$$L_xL_y\frac{eB}{h}$$

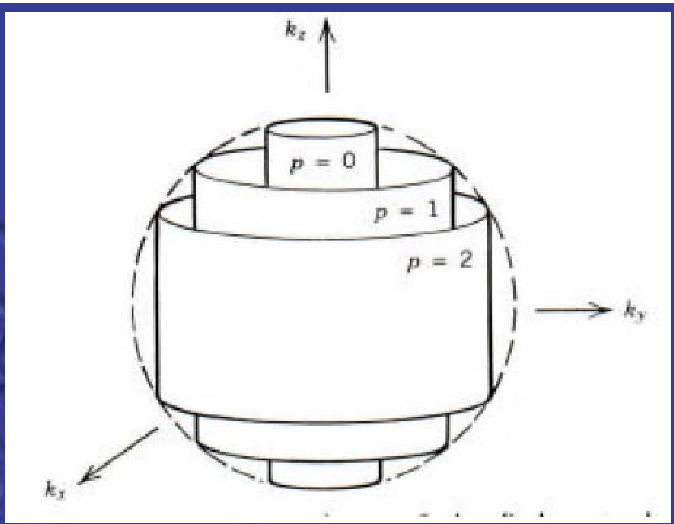
- 这些均匀分布的**k**点现在分布到圆周上，简并到同一能量
- 简并度由磁场强度决定
- 简并度与*n*无关，每个圆周都相同，即单位面积的每个**Landau**能级的简并度都是*eB/h*
- 原来连续的***E*(k)**由于磁场简并到**Landau**能级，成一条条一维的抛物线，**Landau**能级只是使之移动一个常数



B=0时的E(k)关系

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}$$

态密度（有磁场时）



- 对于x-y平面，第n个Landau能级的状态数是
$$D_{xy}=L_xL_y\frac{eB}{h}$$
- 对于z，在dk_z范围，状态数为
$$dN_z=2\frac{L_z}{2\pi}dk_z$$
- 利用
$$E=\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$
- 可得
$$k_z=\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\left[E-\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c\right]^{1/2}$$
$$dk_z=\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\left[E-\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c\right]^{-1/2}dE$$

态密度

- 第n个Landau能级的状态密度

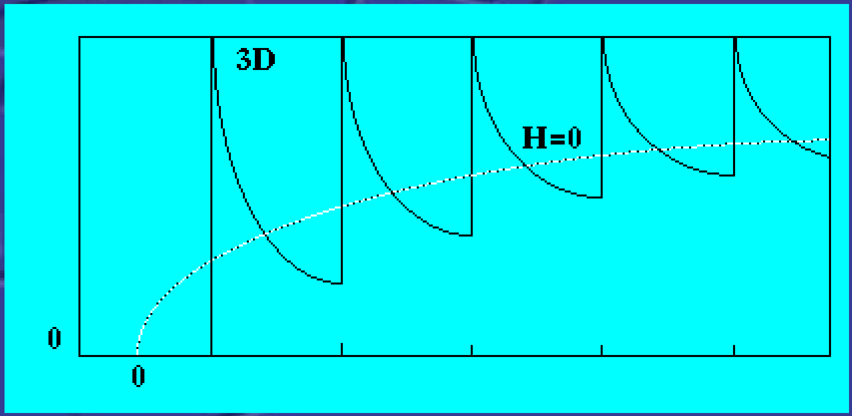
$$dN_n = D_n(E)dE = D_{xy}\,2\frac{L_z}{2\pi}2dk_z$$

$$E > \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

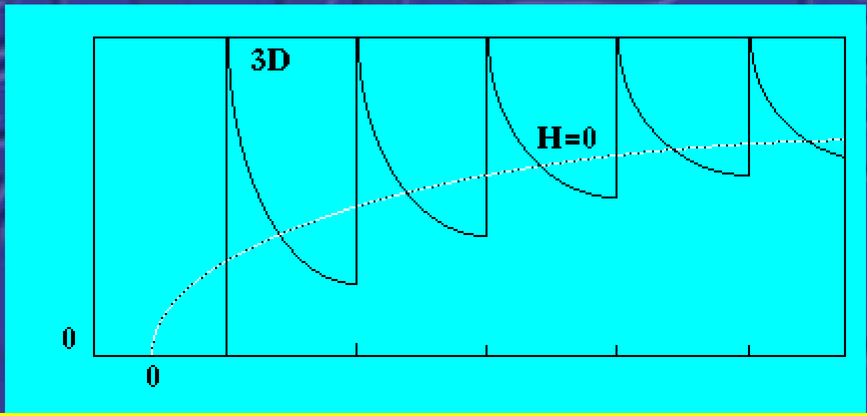
$$D_n(E) = \frac{V}{(2\pi)^2}\hbar\omega_c\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\left[E-\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c\right]^{-1/2}$$

- 总的态密度是

$$D(E) = \sum_{n=0}^{E>\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c} D_n(E)$$



- 能量状态密度：两部分的迭加。在x~y方向的分立能级的态密度和在z方向的连续能级的态密度，即一维的态密度与分立能级的迭加
- 一维电子气体的能量态密度 $D(E) \sim E^{-1/2}$
- 改写磁场中电子气能量关系 $\dfrac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = E - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$
- 于是得到磁场中电子气的态密度为



$$D(E) \sim \sum_n E_n^{-1/2} = \sum_n \left[E - \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \right]^{-1/2}$$

讨论

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\Rightarrow\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}$$

- 原来自由电子在*xy*平面连续的能级，现在是量子化的，这些分立的能级称为**Landau**能级
  - * **Landau**能级分立的物理原因是什么？→
- 如果k_z保持不变，则电子在k_x~ k_y面内；那么，如果k_z连续，电子在空间的轨迹就是螺旋运动
  - * 如将磁场下的电子气限制在二维空间，即限制在上面公式中的*xy*平面，再在面内建立电场使形成比如说x方向的电流，将会发生什么现象？→

→视野拓展→

$$R_H = \frac{V_H}{I_x} = -\frac{1}{j}\frac{h}{e^2}$$

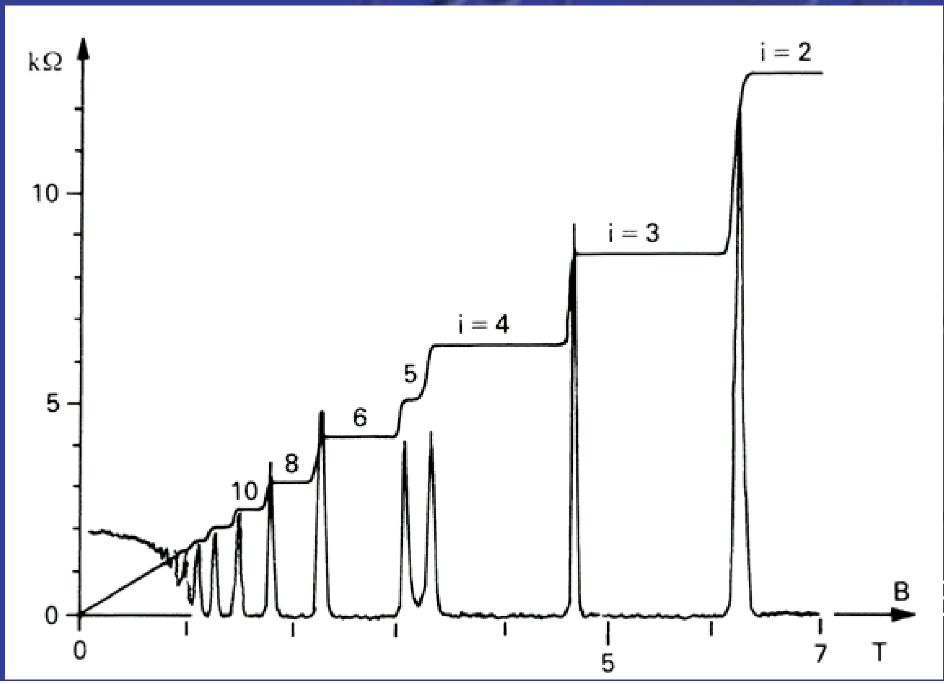
1. Landau能级分裂的物理原因是什么？
2. 如将磁场下的电子气限制在二维空间，即限制在xy平面，再在面内建立电场使形成比如说x方向的电流，将会产生Hall效应
3. 如果把磁场加大、电子密度减少到极至，将有可能发生什么现象？

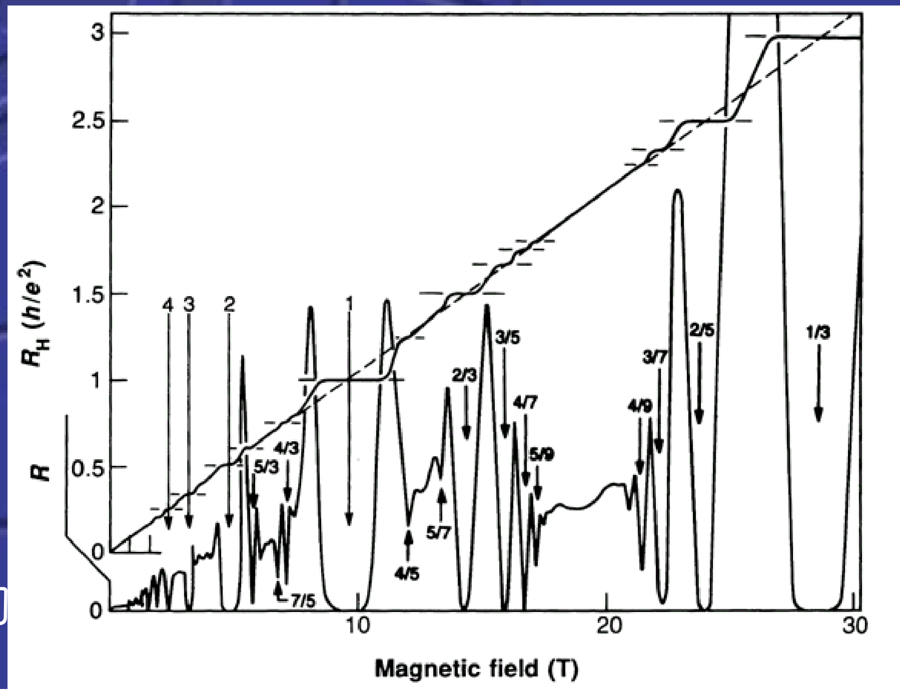
→量子Hall效应

量子Hall效应

$$R_H = \frac{V_H}{I_x} = -\frac{1}{j}\frac{h}{e^2}$$

- 整数量子霍尔效应(1985诺奖): von Klitzing，1.5K，18T，$10^{13}/cm^2$，PRL45, 494 (1980)
- 分数量子霍尔效应(1985诺奖): Tsui, Stoermer, 0.5K，20T，$10^{11}/cm^2$, PRL48, 1559 (1982); Laughlin解释， PRL50, 1395 (1983)





小结：兼答本讲目的中所提两个问题

- 低温下，金属自由电子性质与基态有何不同？
  - ＊ 有限温度费米分布函数不再简单地等于零或一，这导致积分困难。在极低温条件下，这个困难可由**Sommerfeld**积分解决，得到
    - # 比热与温度成正比，总能与温度的二次方成正比
    - # 费米能级随温度升高而降低
- 自由电子气在电、磁场下如何运动？
  - ＊ **Hall**效应，**Hall**系数与**B**和弛豫时间无关
  - ＊ 磁场下的自由电子气，在垂直于磁场的平面内，会由无外磁场时的连续能级分裂成所谓的朗道能级

新引入概念

- **Landau能级**

习题

3. 求低温一维、二维电子气体的费米能级和电子气体平均能量，并与零温度的结果进行比较。

$$E_{\mathrm{F}} \approx E_{\mathrm{F}}^{0}\left[1-\frac{\pi^{2}}{12}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}}}\right)^{2}\right]$$

课堂讨论题：为什么温度越高，费米能级反而越低？其物理意义是什么？